
NATUURKUNDE 1

Mechanica: Behoudswetten

*Physical science is not so much a matter of finding answers
as it is of asking the right questions*

Hans Christian von Baeyer

The test of all knowledge is experiment

Richard Feynman

Kernbegrippen

$M = \text{const}, P = \text{const}, E = \text{const}$

energiebehoud

impuls

impulsbehoud

kracht

massa

massabehoud

wetten van Newton

wisselwerking

Inleiding

▼ Wisselwerking

De mensheid is altijd gefascineerd geweest door de voortdurende veranderingen in zijn omgevingswereld. Vanaf de oudheid zijn natuurfilosofen op zoek naar de oorzaak van beweging en de algemene principes die bewegingsverschijnselen verklaren. In de natuurkunde is dit het vakgebied van de *mechanica* (grieks: $\mu\epsilon\chi\alpha\nu\iota\kappa\omega\varsigma$ mecanikos, leer der werktuigen) waarin bewegingsverschijnselen worden bestudeerd zoals:

- vallende stoffelijke voorwerpen;
- draaiing van de aarde rond de zon;
- de beweging van moleculen in een gas,
- de stroming van electronen een metaal;

etc, etc.

Het belangrijkste principe dat in de loop van de geschiedenis de basis is gaan vormen van de mechanica is de veronderstelling dat beweging tot stand komt onder invloed van de krachten die andere omringende lichamen uitoefenen; dit noemen we *wisselwerking*. Begrippen die hierbij een belangrijke rol spelen zijn: kracht, impuls en energie. Omdat deze begrippen van belang zijn voor vrijwel alle andere gebieden van de natuurkunde, begint een studie van de natuurkunde met de mechanica.

▼ Klassieke Mechanica

De klassieke mechanica omvat de regels en principes die een beschrijving geven van stoffelijke voorwerpen die afmetingen hebben die zeer groot zijn t.o.v. de atomaire schaal van 10^{-9} m. De algemene regels waaraan de beweging van deze voorwerpen en hun wisselwerking voldoen zijn ontdekt door Galileo Galilei (1564-1642), Rene Descartes (1596-1650), Christiaan Huygens (1629-1695) en Isaac Newton (1642-1727). Deze regels zijn vastgelegd in de drie wetten van Newton.

In de traditionele manier waarop de mechanica wordt onderwezen, worden de wetten van Newton als uitgangspunt genomen. Vervolgens wordt dan aangetoond dat hieruit de behoudswetten van impuls, energie en impulsmoment volgen. In de moderne natuurkunde is echter gebleken dat deze behoudswetten natuurwetten zijn met een zeer algemene geldigheid waaraan iedere natuurkundige theorie, niet alleen de theorie van Newton, is onderworpen. We zullen daarom hier de zaak omdraaien en de wetten van Newton beschouwen als het noodzakelijk gevolg van deze behoudswetten.

▼ Quantum Mechanica

De mechanica van Newton wordt wel de "klassieke" mechanica genoemd om onderscheid te maken met de quantummechanica zoals die in het begin van deze eeuw ontwikkeld is door Max Planck (1858-1947), Niels Bohr (1885-1962), Erwin Schrödinger (1887-1961), Werner Heisenberg (1901-1976) en Paul Dirac (1902-1984). De quantummechanica is belangrijk voor de beschrijving van atomaire processen, en wordt gekarakteriseerd door de *constante van Planck* $h = 6.6 \times 10^{-34}$ J s. Deze constante, uitgedrukt in de eenheden Joule en seconde, is zeer klein en voor de meeste processen die we in het dagelijkse leven waarnemen geldt dat quantumeffecten geen rol spelen.

▼ Speciale Relativiteitstheorie

Als voorwerpen zeer snel bewegen, moeten de regels van mechanica worden aangepast volgens de relativiteitstheorie (1905) van Albert Einstein (1879-1955). Effecten zijn echter pas merkbaar bij snelheden die de lichtsnelheid $c = 3 \cdot 10^8$ km/s benaderen. Zulke snelheden worden bereikt in het heelal, getuige de kosmische straling die op aarde valt, en in grote deeltjes-versnellers, zoals bij het CERN bij Geneve, die zijn gebouwd om de fundamentele bouwstenen van de natuur te bestuderen. In het dagelijks leven zijn relativistische effecten volstrekt verwaarloosbaar. Neem bijvoorbeeld de beweging van de aarde rond de zon. Voor menselijke begrippen is de snelheid van de aarde, 30 km/s, zeer hoog, maar toch altijd nog ongeveer 10^4 kleiner dan de lichtsnelheid.

▼ Algemene Relativiteitstheorie

Er is nog een derde beperking van de mechanica van Newton. Als de zwaartekracht zeer sterk is, bijvoorbeeld in de buurt van een zwart gat, of tijdens de eerste stadia van het heelal vlak na de oerknal, dan zijn de wetten van Newton niet meer geldig. Deze verschijnselen worden beschreven door de algemene relativiteitstheorie van Einstein (1915).

Theorie

▼ Vectoren

▼ Definitie

Een punt P in de 3-dimensionale ruimte wordt vastgelegd door een rij van drie getallen (x,y,z) die de coördinaten worden genoemd. De coördinaten geven de afstand van het punt P in drie richtingen tot een gekozen assenstelsel met drie loodrechte assen X,Y,Z. De pijl die getrokken kan worden van de oorsprong naar het punt P heet een *vector*, aangegeven met een vette letter $\mathbf{x} = OP$ (zie figuur 1).

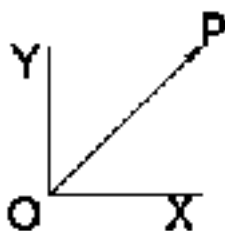


Figure 1

Aangezien de richting en de lengte van de vector volledig worden vastgelegd door de coördinaten van P, kunnen we de vector representeren door alleen de coördinaten op te geven. We noteren dit in de vorm van een rij-matrix $\mathbf{x} = (x, y, z)$ of een kolom matrix

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1)$$

al naar het uitkomt. Een voorbeeld van een vector is $\mathbf{r} = (r_x, r_y, r_z)$ die de positie van een deeltje vastlegt, en de *plaatsvector* wordt genoemd.

▽ Bewerkingen met vectoren

Optelling

Gegeven twee willekeurige vectoren

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \quad (2)$$

dan is de som gedefinieerd als $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$ met

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix} \quad (3)$$

Deze optellingsregel geeft hetzelfde resultaat als de bekende parallellogram – constructie.

Vermenigvuldiging

Vectoren kunnen vermenigvuldigd worden met een getal λ

$$\lambda \mathbf{a} = \begin{pmatrix} \lambda a_x \\ \lambda a_y \\ \lambda a_z \end{pmatrix} \quad (4)$$

Deze vector heeft dezelfde richting als \mathbf{a} .

Lengte

De lengte van een vector, ook wel absolute waarde genoemd, wordt gegeven door de wortel van de som der kwadraten van de componenten :

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (5)$$

Skalair produkt (in-produkt)

Het skalair product tussen twee vectoren \mathbf{a} en \mathbf{b} wordt aangegeven door een punt en is gedefinieerd als

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (6)$$

In deze notatie kunnen we de absolute waarde schrijven als

$$|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a} \bullet \mathbf{a} \quad (7)$$

Voor twee vectoren die niet in elkaars verlengde liggen is het skalair product evenredig met de cosinus van de hoek tussen \mathbf{a} en \mathbf{b} :

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\theta) \quad (8)$$

Dit is eenvoudig in te zien door een assenstelsel te kiezen met de X – as langs \mathbf{a} of \mathbf{b} .

Als twee vectoren \mathbf{a} en \mathbf{b} loodrecht op elkaar staan geldt $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = 0$.

Vectorprodukt (uit-produkt)

Het vectorprodukt van twee vectoren \mathbf{a} en \mathbf{b} is de vector gegeven door

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \quad (9)$$

De grootte van deze vector is

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\theta) \quad (10)$$

en de richting wordt gegeven door de normaal op het vlak door \mathbf{a} en \mathbf{b} .

▼ Wetten van Newton

▼ I. Traagheidswet

Een lichaam waarop geen kracht werkt volgt een eenparige beweging of is in rust

$$\mathbf{V} = \text{const} \quad (11)$$

Het volhardingsvermogen van een lichaam om in de toestand van rust of constante snelheid te blijven wordt *traagheid* genoemd. De traagheid van een voorwerp wordt gekarakteriseerd door zijn massa M .

- In de mechanica van Newton is totale massa van een systeem een intrinsiek behouden grootheid.
- De traagheidswet geeft uitdrukking aan de algemeen geldende behoudswet voor totale impuls

$$\mathbf{P} = M \mathbf{V} = \text{const}. \quad (12)$$

Voor zover we weten is dit een universele natuurwet voor systemen waarop geen kracht werkt.

- We kunnen altijd onze eigen snelheid zo aanpassen dat een voorwerp voor onze waarneming in rust is. Daarom zijn eenparige snelheid en rust in de traagheidswet equivalent.

Historische noot: De traagheidswet wordt de eerste wet van Newton genoemd, maar historisch moet de eer aan Galileo Galilei en Rene Descartes gegeven worden.

▼ II. Bewegingswet

De verandering van de impuls per tijdseenheid is gelijk aan de aangrijpende kracht \mathbf{F} en vindt plaats langs de richting van de kracht

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dt} P_x \\ \frac{d}{dt} P_y \\ \frac{d}{dt} P_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \quad (13)$$

Historische noot: de bovenstaande formule is nergens in het werk van Newton te vinden, maar verschijnt in 1750 voor het eerst in een artikel van de wiskundige Leonard Euler (1707-1783).

- De tweede wet van Newton schrijft verandering van impuls toe aan het optreden van een kracht, zonder het krachtbegrip te specificeren. De expliciete vorm van de kracht voor een gegeven geval moet op grond van andere principes gevonden worden.
- Voor constante massa wordt de tweede wet van Newton $F = m a$. Dit is echter een speciaal geval; ondanks het feit dat totale massa behouden is, hoeft dit niet te gelden voor een deelsysteem (denk aan de uitstoot van gasen door een raket)

- De traagheidswet volgt als de kracht op een systeem gelijk aan nul is en tevens de massa behouden is.
- Bij de tweede wet van Newton hoort het superpositiebeginsel van Newton dat zegt dat krachten mogen worden opgeteld als een som van vectoren:

$$\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i \quad (14)$$

Dus de kracht op een enkel deeltje in het zwaartekrachtsveld van de aarde is de resultante kracht verkregen door optelling van alle zwaartekrachten uitgeoefend door alle massieve deeltjes waaruit de aarde bestaat. Newton heeft bewezen dat de resultante zwaartekracht uitgeoefend door een bolvormig lichaam berekend kan worden alsof alle massa geconcentreerd is in het middelpunt.

▼ III. Reactiewet

De onderlinge krachten tussen twee deeltjes zijn altijd gelijk en tegengesteld gericht

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} \quad (15)$$

langs de lijn die de instantane posities van de twee deeltjes verbindt.

- Deze reactiewet is een noodzakelijk gevolg van het feit dat de totale impuls

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \quad (16)$$

van het systeem behouden moet zijn:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p}_1 + \frac{d}{dt} \mathbf{p}_2 = 0 \quad (17)$$

Anders gezegd, het systeem kan geen kracht op zichzelf uitoefenen, hetgeen weer de traagheidswet is. Dit verklaart de algemene geldigheid van de derde wet.

- De derde wet van Newton zegt niet alleen dat krachten tegengesteld gericht zijn, maar ook dat deze werken langs de verbindinglijn tussen deeltjes (men noemt dit centrale krachten). Als gevolg van deze beperking geldt dat er nog een andere grootheid behouden is namelijk impulsmoment. Deze grootheid zullen we hier verder niet bespreken.

▼ Inertiaalstelsel en relativiteitsprincipe

Een coördinatenstelsel waarin de traagheidswet van toepassing is wordt een *inertiaalstelsel* genoemd. De aarde is geen exact inertiaalstelsel vanwege de dagelijkse rotatie om de as en de rotatie rond de zon. Het zonnestelsel is in zeer goede benadering wel een inertiaal stelsel.

Als we een inertiaalstelsel gevonden hebben, dan is ieder coördinatenstelsel dat eenparig beweegt t.o.v. het inertiaalstelsel zelf ook een inertiaal stelsel. Dit volgt direct uit de traagheidswet en wordt het *relativiteitsprincipe* genoemd. We mogen hieruit concluderen dat eenparige snelheid geen absolute maar slechts relatieve betekenis heeft.

▼ Kracht

Kracht openbaart zich als de verandering van impuls per tijdseenheid.

$$(F_x, F_y, F_z) = \left(\frac{dP_x}{dt}, \frac{dP_y}{dt}, \frac{dP_z}{dt} \right) \quad (18)$$

Zo gezien is de tweede wet van Newton niet meer dan een definitie. De grote toepasbaarheid van het begrip kracht en de tweede wet van Newton is gelegen in het feit dat krachten veelal eenvoudige

wiskundige functies van de onderlinge afstand r tussen de deeltjes blijken te zijn. B.v. de zwaartekracht tussen twee lichamen met massas m_1 en m_2 blijkt omgekeerd evenredig te zijn met het kwadraat van de afstand:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (19)$$

met G de zwaartekrachtsconstante. Als dit in de tweede wet van Newton wordt gesubstitueerd, krijgt deze de vorm van een tweede-orde differentiaal vergelijking in de tijd. Dit maakt het mogelijk beweging te voorspellen als een oplossing van deze differentiaalvergelijking.

Het is een van de taken van de natuurkunde om krachtwetten te vinden die van toepassing zijn in een gegeven situatie. Naar de huidige inzichten zijn er vier fundamentele krachten in de natuur, namelijk:

- (i) de *zwaartekracht*, werkzaam tussen alle stoffelijke lichamen en deeltjes in het heelal.
- (ii) de *electromagnetische kracht*, verantwoordelijk voor de wisselwerking tussen atomen en moleculen, en electromagnetische processen waaronder de absorptie en emissie van licht. Alle scheikundige en biologische processen hebben een electromagnetische oorsprong.
- (iii) de *zwakke kracht*, die vervalsprocessen van elementaire deeltjes beschrijft, zoals het verval van een neutron in een proton, electron en een neutrino:

$$n \rightarrow p + e + \nu$$

Dit heet *bèta-verval*.

- (iv) de *sterke kracht* die reacties in atoomkernen en tussen elementaire deeltjes beheerst.

Op de vraag waarom dit zo is heeft de natuurkunde nog geen antwoord.

▼ Zwaartepunt

Voor een systeem bestaande uit deeltjes $i=1,2,\dots, N$ met massas m_i is het zwaartepunt gedefinieerd als het middelpunt van de posities \mathbf{r}_i van de deeltjes:

$$\mathbf{R} = \sum_i \mu_i \mathbf{r}_i \quad (20)$$

gewogen met de relatieve massa verhouding

$$\mu_i = \frac{m_i}{M}, \quad \sum_i \mu_i = 1 \quad (21)$$

waarin

$$M = \sum_i m_i \quad (22)$$

de *totale massa* van het systeem is. In componenten uitgeschreven is de definitie van het zwaartepunt

$$(R_x, R_y, R_z) = \sum_i \mu_i (r_{i,x}, r_{i,y}, r_{i,z}) \quad (23)$$

Als we de tijdsafgeleide nemen van deze uitdrukking dan krijgen we

$$M \frac{d}{dt} \mathbf{R} = \sum_i \mathbf{p}_i = \mathbf{P} \quad (24)$$

- De totale impuls is gelijk aan de totale massa van het systeem maal de snelheid van het zwaartepunt

$$\mathbf{P} = M \mathbf{V} \quad (25)$$

met $\mathbf{V} = d\mathbf{R}/dt$.

- Als de impuls behouden is beweegt het zwaartepunt eenparig: $d\mathbf{V}/dt = 0$.

▼ Massa

▼ Definitie

Massa is de maat voor traagheid, d.w.z. weerstand tegen verandering van snelheid t.g.v. een kracht. Men spreekt van trage massa. Massa is een intrinsieke eigenschap die behouden is, althans in de klassieke mechanica, d.w.z. er kan geen massa verloren gaan of uit het niets gemaakt worden. Volgens de relativiteitstheorie is massa een vorm van energie die omgezet kan worden in andere vormen van energie zoals kinetische energie of stralingsenergie en vice versa.

Massa is additief, d.w.z. de totale massa van een systeem wordt verkregen door alle deelmassas m_i op te tellen

$$M = \sum_i m_i \quad (26)$$

De additiviteit staat ons toe een gegeven systeem te beschouwen als een geheel of als samengesteld uit deelsystemen.

▼ Gewicht

De aantrekkingskracht van de aarde op een lichaam met massa m wordt het gewicht genoemd

$$w = m g \quad (27)$$

Uit experimenten met houten en loden kogels die hij langs een gepolijste groef in een hellend vlak liet glijden, had Galilei al vastgesteld dat dicht bij de aarde alle voorwerpen vallen met dezelfde valversnelling $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$. Omdat alle lichamen dezelfde valversnelling ondervinden, is massa evenredig met gewicht:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{w_1}{w_2} \quad (28)$$

Dit heeft er toe geleid dat in het dagelijks leven gewoonlijk geen onderscheid wordt gemaakt tussen gewicht en massa, maar dit is niet correct. Massa wordt uitgedrukt in de eenheid "kilogram" en gewicht in de eenheid "newton". Een materieel voorwerp kan gewichtloos zijn (bijvoorbeeld een raket in de ruimte als deze zich ver van andere lichamen bevindt), maar niet massaloos.

▼ Equivalentieprincipe

Gewoonlijk wordt massa gemeten met een massabalans door het gewicht te vergelijken met een standaard gewicht. Als de massa op deze wijze is bepaald spreekt men van *zware massa*. De massa die voorkomt in de tweede wet van Newton noemt men de *trage massa*. Voor zover nu bekend zijn trage en zware massa aan elkaar gelijk. Door Newton werd dit al vastgesteld met een nauwkeurigheid van 10^{-3} in slinger experimenten met verschillende materialen. In latere experimenten van Eötvös (1889) en Dicke, Roll en Krotkov (1964) is de nauwkeurigheid steeds verder opgevoerd en inmiddels is deze beter dan 10^{-10} voor de materialen aluminium en goud. De gelijkheid van zware en trage massa staat bekend als het *equivalentie principe*.

▼ Impuls

▼ Definitie

De impuls van een lichaam hangt af van zowel de (trage) massa m als de snelheid v en is gedefinieerd als de vector

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad (29)$$

De totale impuls van een systeem van meerdere deeltjes $i=1, \dots, N$ is de som van de impulsen van de individuele deeltjes

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^N \begin{pmatrix} p_{i,x} \\ p_{i,y} \\ p_{i,z} \end{pmatrix} \quad (30)$$

▼ Impulsbehoud

Het is een algemene natuurwet dat de totale impuls van een geïsoleerd systeem (waar dus geen krachten op werken) een behouden grootheid is, d.w.z. niet verandert in de tijd:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^N \begin{pmatrix} p_{i,x} \\ p_{i,y} \\ p_{i,z} \end{pmatrix} = \text{const} \quad (31)$$

Het feit dat deze som behouden is wil zeggen dat de krachtenparen tussen de verschillende deeltjes elkaar precies compenseren (reactiewet van Newton):

$$\frac{d}{dt} \mathbf{P} = \sum_i \frac{d}{dt} \mathbf{p}_i = 0 \quad (32)$$

Dit is een gevolg van de traagheidswet, maar we kunnen ook zeggen dat de traagheidswet volgt uit het behoud van impuls. Als twee deeltjes met massas m_1 en m_2 met elkaar botsen, en er werkt geen externe kracht, dan geldt de wet van impulsbehoud

$$\left\{ m_1 \begin{pmatrix} v_{1,x} \\ v_{1,y} \\ v_{1,z} \end{pmatrix} + m_2 \begin{pmatrix} v_{2,x} \\ v_{2,y} \\ v_{2,z} \end{pmatrix} \right\}_{\text{voor}} = \left\{ m_1 \begin{pmatrix} v_{1,x} \\ v_{1,y} \\ v_{1,z} \end{pmatrix} + m_2 \begin{pmatrix} v_{2,x} \\ v_{2,y} \\ v_{2,z} \end{pmatrix} \right\}_{\text{na}} \quad (33)$$

die een verband geeft tussen de snelheden voor de botsing en daarna.

▼ Energie

▼ Kinetische energie

Een deeltje met massa m en snelheid v heeft een kinetische energie

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \quad (34)$$

Kinetische energie is een skalar, d.w.z. hangt alleen af van de massa en de grootte van de snelheid, niet de richting. Kinetische energie is een maat voor de hoeveelheid arbeid die het systeem kan verrichten.

Voor een systeem van $i = 1, \dots, N$ deeltjes is de totale kinetische energie gelijk aan de som

$$E_{\text{kin}} = \sum_{i=1}^N E_{\text{kin},i} \quad , \quad i = 1..N \quad (35)$$

▼ Rustenergie en massa

Volgens de relativiteitstheorie is in een deeltje met massa m een interne energie opgeslagen

$$E_{\text{int}} = m c^2 \quad (36)$$

De *totale energie* van een deeltje is de som van kinetische en deze rustenergie

$$E = E_{\text{kin}} + E_{\text{int}} = m c^2 + \frac{1}{2} m v^2 \quad (37)$$

Voor zeer hoge snelheden is deze formule niet correct maar moet volgens de relativiteitstheorie zijn

$$E = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (38)$$

Ontwikkelen van de noemer in een Taylorreeks naar de dimensieloze verhouding $(v / c)^2$ geeft als eerste twee termen de rustenergie en de kinetische energie zoals in de eerdere formule.

- Er bestaan deeltjes zoals het foton en het neutrino die geen rustmassa en rustenergie hebben omdat deze deeltjes altijd met de lichtsnelheid bewegen. Een dergelijk deeltje wordt dus gekarakteriseerd door $m = 0$ en $v = c$. Men spreekt van een *massaloos* deeltje. Bij een energie E heeft een dergelijk deeltje een impuls E/c .
- Voor het neutrino staat overigens nog niet helemaal vast of dit deeltje strikt massaloos is; er zijn experimenten die zouden kunnen wijzen op een neutrino met een kleine massa.

▼ Energiebehoud

▼ elastische botsing

Beschouw een twee-deeltjes botsing tussen deeltjes met massas m_1 en m_2 . Voor de botsing naderen de deeltjes elkaar met relatieve snelheid

$$v_{12} = |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| \quad (39)$$

In veel gevallen wordt waargenomen dat de relatieve snelheden voor en na de botsing aan elkaar gelijk zijn

$$v_{12 \text{ voor}} = v_{12 \text{ na}} \quad (40)$$

Als dit het geval is heet de botsing *elastisch*. Zo is een botsing tussen biljartballen vrijwel elastisch, zoals het eerst schijnt te zijn opgemerkt door Christiaan Huygens.

Deze gelijkheid kan niet herleid worden tot impulsbehoud; de relatieve snelheid is een onafhankelijke behouden grootheid. Dit is eenvoudig in te zien door het geval te beschouwen van een 1-dimensionale botsing van twee deeltjes met gelijke massa's. Impulsbehoud geeft

$$\{v_1 + v_2\}_{\text{voor}} = \{v_1 + v_2\}_{\text{na}} \quad (41)$$

terwijl de gelijkheid van relatieve snelheid juist geeft

$$|v_1 - v_2|_{\text{voor}} = |v_1 - v_2|_{\text{na}} \quad (42)$$

Combinatie geeft een nieuwe behoudswet, namelijk die van behoud van kinetische energie

$$\left\{ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \right\}_{\text{voor}} = \left\{ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \right\}_{\text{na}} \quad (43)$$

In dit geval volgt deze wet dus uit het behoud van relatieve en totale snelheid.

- Het bewijs kan gegeneraliseerd worden voor elastische botsingen in 3D en voor ongelijke massa's.

▽ inelastische botsing

Een botsing heet inelastisch als meer of minder kinetische energie wordt gevonden na dan voor de botsing

$$\left\{ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \right\}_{\text{voor}} = \left\{ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \right\}_{\text{na}} + Q \quad (44)$$

We nemen aan dat totale energie altijd behouden is. Dus, als $Q > 0$ dan is er een afname van kinetische energie, die kennelijk is omgezet in interne energie van de deeltjes (endo-energetische botsing). Denk aan een botsing tussen atomen die door de botsing in een aangeslagen toestand gebracht worden. In een botsing met $Q < 0$ (exo-energetische botsing) is er een toename van kinetisch energie ten koste van de interne energie van de deeltjes.

- Een botsing heet volledig *inelastisch* als de deeltjes na de botsing aan elkaar blijven kleven en als een geheel verder gaan. Een voorbeeld is de absorptie van een foton door een atoom. Een ander voorbeeld is een bal gehakt die in een bord spaghetti valt.

Testvragen

▽ 1. Trage Massa

Een standaard kilogram weegt op aarde ongeveer 10 newton. Op de maan is de zwaartekracht ongeveer een zesde van die op aarde.

- Wat is de massa en het gewicht op de maan.
- Wat is de massa en het gewicht in de lege ruimte?
- Waar is het gemakkelijker een kilogram op te tillen, op de aarde of op de maan?

▽ 2. Versnelling

Als we afzien van wrijving is het dan eenvoudiger een baksteen een horizontale snelheid van 5 m/s te geven

- ☐ op de maan
- ☐ op de aarde
- ☐ in de lege ruimte ?

▼ 3. Kracht

Een boek met een gewicht van 12 newton wordt op de palm van een hand omhoog gehouden.

- a. Beschrijf de twee krachten die op het boek werken.
- b. Zijn deze krachten gelijk maar tegengesteld gericht?
- c. Zijn deze krachten deel van een krachtenpaar?

▼ 4. Botsing frontaal

Een zware vrachtauto botst frontaal met een kleine personenauto. Welke kracht is groter:

- ☐ de kracht van de auto op de vrachtwagen
- ☐ of omgekeerd
- ☐ geen van beide

▼ 5. Botsing van achteren

Een rijdende auto botst van achteren op een stilstaande auto. Wat is groter,

- ☐ de kracht van de bewegende auto op de stationaire auto
- ☐ of omgekeerd
- ☐ of evengroot?

▽ 6. Constante kracht

Een constante kracht werkt gedurende korte tijd op een luchtkusservoertuig dat aanvankelijk in rust is. De kracht geeft het voertuig een zekere eindsnelheid. De wrijving is verwaarloosbaar. Dezelfde kracht wordt gedurende dezelfde tijd uitgeoefend op een ander luchtkusservoertuig dat twee keer zo zwaar is. De eindsnelheid van het zwaardere voertuig is ten opzichte van het lichtere voertuig:

- ☐ een-vierde
- ☐ vier maal zo groot
- ☐ de helft
- ☐ het dubbele
- ☐ hetzelfde

▽ 7. Constante kracht herhaald

Een constante kracht werkt gedurende korte tijd op een luchtkusservoertuig dat aanvankelijk in rust is. De kracht geeft het voertuig een zekere eindsnelheid V . Veronderstel nu dat we nogmaals de kracht even lang laten werken, is dan de toename van de snelheid van het voertuig:

- ☐ gelijk aan twee maal de eindsnelheid V
- ☐ gelijk aan het kwadraat van de eindsnelheid V
- ☐ gelijk aan vier maal de eindsnelheid V
- ☐ dezelfde als toen het voertuig begon vanuit rust
- ☐ niet te bepalen uit de gegevens

▽ 8. Lift

Een persoon staat in een lift die eenparig naar boven beweegt. De opwaartse kracht die de liftvloer uitoefent op de persoon is:

- ☐ groter dan

- ☐ gelijk aan
- ☐ kleiner dan het gewicht van de persoon.

▽ 9. Snelheid treinwagon

Veronderstel dat regen vertikaal naar beneden valt in een open treinwagon die over een recht horizontaal spoor rijdt zonder frictie. Als een gevolg van de waterlast zal de snelheid van de wagon

- ☐ toenemen
- ☐ gelijk blijven
- ☐ afnemen

▽ 10. Energie treinwagon

Veronderstel dat regen vertikaal naar beneden valt in een open treinwagon die over een recht horizontaal spoor rijdt zonder frictie. Als een gevolg van waterlast zal de kinetische energie van de met water gevulde wagon

- ☐ toenemen
- ☐ gelijk blijven
- ☐ afnemen

▽ 11. Worp

Stel iemand staat op een wagon, aanvankelijk in rust op een spoorbaan met weinig frictie. Hij gooit een bal tegen de voorwand van de wagon. Als de bal is terugkaatst, is de wagon dan in beweging?

- ☐ Ja, naar rechts.
- ☐ Ja, naar links.
- ☐ Nee, er gebeurt niets.

Mathematica

▼ Nog even herhalen

▼ De opdrachtregel, wiskundige operatoren, variabelen en spaties

In *Mathematica* worden opdrachten in een opdrachtregel ingevoerd. Een opdrachtregel met de opdracht **opdracht** ziet er als volgt uit:

```
opdracht
```

```
opdracht
```

Met **shift + Return** (of met de rechter **Enter** toets op een uitgebreid toetsenbord) wordt de opdracht uitgevoerd. De input en output wordt aangegeven en genummerd.

Binnen zo'n opdrachtregel kun je gebruik maken van de bekende wiskundige operatoren: +, -, *, / en ^ (voor de exponent). De vermenigvuldiging mag vervangen worden door een spatie: **a*b** betekent het zelfde als **a b**. Maar: **ab** is een variabele met de naam *ab*. Een string van karakters beginnende met een letter wordt herkend als een variabele (**a2** is een variabele, maar **2a** is gelijk aan **2*a**).

Opmerking: Je kunt gebruik maken van een *palet* om je commando's in te voeren. Dat gaat als volgt: kies binnen *File* het item *Palettes* en vervolgens bijvoorbeeld *Basic Typesetting*. Hier vind je verschillende operaties. Ook kun je nu variabelen een subscript geven.

▼ Haakjes in Mathematica

Mathematica kent drie verschillende soorten haakjes, die elk anders gebruikt worden:

- *rechte haken* worden gebruikt voor het argument van functies:

```
Sin[x] of Plot[ , ].
```

- met *ronde haken* kun je wiskundige uitdrukkingen groeperen:

```
2*(x + 3) .
```

- *accolades* omsluiten lijsten van objecten. De objecten worden gescheiden door komma's:

```
{object1, object2, ...}
```

▼ Gelijkheidstekens =, == en :=

Het gebruik van =, == en := is als volgt:

- Met het symbool = ken je een waarde toe aan een bepaalde variabele. Deze waarde wordt waar mogelijk in berekeningen door *Mathematica* gebruikt. Voorbeeld:

```
formule = 2 (x + 3)
```

```
2 (3 + x)
```

$$x = y / 3$$

$$\frac{y}{3}$$

formule

$$2 \left(3 + \frac{y}{3} \right)$$

Als je deze variabele wilt vrijmaken van zijn gegeven waarde gebruik je:

$$x = .$$

- Met het symbool `==` noteer je het wiskundige gelijktteken. Een vergelijking wordt als volgt ingetoetst:

$$x + 6 == 2x - 3$$

$$6 + x == -3 + 2x$$

Deze vergelijking heeft als oplossing:

`Solve[%, x]`

$$\{ \{x \rightarrow 9\} \}$$

Een variabele kan als waarde een vergelijking krijgen:

$$\text{vergelijking} = x^2 + x + 1 == 0$$

$$1 + x + x^2 == 0$$

$$\text{verg} = 4 == 5$$

False

Mathematica voert in het laatste voorbeeld een test uit met een negatief resultaat. Welke waarde heeft **verg**?

- Met het symbool `:=` definieer je functies. Mathematica gebruikt steeds de gedefinieerde waarde in berekeningen:

```
f[x_] := x + 10
```

```
f[y^2+1]
```

$$11 + y^2$$

▼ De Mathematica Kernel

De *Mathematica* Kernel voert de opdrachten die je geeft uit. Het kan voorkomen dat de kernel erg druk bezig is en wel zo druk dat het je te lang duurt. Dat kan komen omdat de berekening bewerkelijk is. Het kan ook komen omdat je iets hebt gevraagd dat niet helemaal klopt. Je kunt de kernel dan op de volgende manier stoppen:

Ga naar *Kernel* in de menubalk en kies *Quit Kernel -> Local*. Als je hierna een commando intoetst wordt een nieuwe kernel gestart. Je moet nu wel de oude opdrachten opnieuw uitvoeren als je hun resultaten nodig hebt.

▼ Commando's

▼ Een schone lei

Om alle variabelen van hun gegeven waarden te verlossen gebruik je het volgende commando:

```
Remove["Global`*"]
```

Als je een bepaalde variabele **var** wilt vrijmaken van zijn gegeven waarde gebruik je: **var = .**

De variabele **var** heeft nu geen waarde meer.

Wil je meerdere, maar niet alle variabelen vrijmaken dan gebruik je: **Clear[var1, var2, ...]**

Nog rigoreuzer is het achtereenvolgens kiezen van *Quit Kernel* en *Start Kernel* uit het *Kernel* menu.

▼ Laden van packages

Sommige wiskundige bewerkingen hebben een package nodig. Daar staat informatie in voor het uitvoeren van de bewerking. Het laden moet uiteraard gebeuren voordat je het commando gebruikt.

Stel je wilt het **Graphics`Colors`** package laden. Gebruik dan het volgende commando:

```
<<Graphics`Colors`
```

▼ Mathematica commando's

Onder dit kopje vind je een korte uitleg van *Mathematica* commando's die je in dit notebook nodig zult hebben.

Differentiëren

First, Last, [[1]] en %

Output onderdrukken

PowerExpand

Simplify

Solve

Stelsels vergelijkingen

Substitutie (/. en ->)

Output onderdrukken

Door achter een bepaald commando een puntkomma te plaatsen kan de output worden onderdrukt. Dat is bijvoorbeeld handig als de output lange lijsten gegevens zijn die we liever niet willen zien.

```
lijst = {a, b, c}
```

```
{a, b, c}
```

```
lijst = {a, b, c};
```

First, Last, [[i]] en %

Met de commando's **First**, **Last** en **[[i]]** (waarbij $i \in \mathbb{N}$), kun je objecten aanwijzen binnen een lijst. Stel je hebt de volgende lijst:

```
lijst = {x, 23, y+3, z}
```

```
{x, 23, 3 + y, z}
```

en je wilt de waarde van het derde object uit die lijst toekennen aan de variabele **var**. Dit doe je als volgt:

```
var = lijst[[3]]
```

 $3 + y$

Wanneer je het eerste of laatste object wilt gebruiken kun je **First** en **Last** gebruiken.

```
var2 = First[lijst]
```

 x

```
var3 = Last[lijst]
```

 z

Dit is ook handig als je een vergelijking hebt en je wilt het linker en/of rechterlid bewerken.

```
vg1 = x^2 + 5 == Tan[x] - 3
```

 $5 + x^2 == -3 + \text{Tan}[x]$

```
lhs = First[vg1]
```

 $5 + x^2$

```
rhs = Last[vg1]
```

 $-3 + \text{Tan}[x]$

Met de operator % kun je de vorige output aanwijzen, met %% die daarvoor. Let wel op bij het gebruik ervan. Wanneer je tussendoor een ander commando uitvoert en vervolgens een opdrachtregel met een % aanroep erin herhaald klopt de aanwijzing niet meer.

```
x + 3
```

 $3 + x$

```
% - 3
```

```
x
```

Solve

Voor het oplossen van vergelijkingen kun je **Solve** gebruiken. **Solve** heeft twee argumenten nodig. Het eerste is de op te lossen vergelijking, het tweede is de variabele waarnaar de vergelijking moet worden opgelost:

```
verg = x + 4 == x^2
```

```
4 + x == x^2
```

```
oplossing = Solve[verg, x]
```

```
{ {x -> 1/2 (1 - Sqrt[17])}, {x -> 1/2 (1 + Sqrt[17])} }
```

Solve geeft als antwoord een lijst van substitutieregels. **x** heeft dus nog niet een van de gevonden waarden. Dat moet je zelf doen d.m.v. een substitutie (zie verder).

Simplify

Met **Simplify** kun je een, bijvoorbeeld met **Solve**, verkregen antwoord vereenvoudigen.

Substitutie (/ . en ->)

Wil je nu een van de gevonden waarden in een verdere berekening gebruiken dan kun je dat op twee manieren doen. Je kunt *Mathematica* bij een bepaalde berekening vertellen welke waarde gebruikt moet worden voor **x**. Dat gaat met **/ .** :

```
x^3 + 8 /. oplossing
```

```
{ 8 + 1/8 (1 - Sqrt[17])^3, 8 + 1/8 (1 + Sqrt[17])^3 }
```

x heeft nu geen waarde gekregen:

```
x
```

```
x
```

Om **x** een waarde te geven, bijvoorbeeld het eerste resultaat, doe je het volgende:

```
x = x /. oplossing[[1]]
```

$$\frac{1}{2} (1 - \sqrt{17})$$

x heeft nu wel een waarde:

```
x
```

$$\frac{1}{2} (1 - \sqrt{17})$$

Achter /. kan ook een substitutie staan. Dat geef je aan met ->:

```
y + 3 /. y -> x
```

$$3 + \frac{1}{2} (1 - \sqrt{17})$$

y heeft geen waarde gekregen!

```
y
```

y

PowerExpand

Met **PowerExpand** kun je een uitdrukking als $(x y)^p$ omschrijven in $x^p y^p$:

```
Sqrt[x^2 y]
```

$$\sqrt{x^2 y}$$

```
PowerExpand[%]
```

$$x \sqrt{y}$$

Stelsels vergelijkingen

Een stelsel vergelijkingen geef je op als een lijst: `stelsel = {verg1, verg2, verg3, ... }`

Waarbij `verg1` zoiets is als: `verg1 = x^2 == 2`

Het stelsel oplossen gaat als volgt: `Solve[stelsel, {var1, var2, var3, ...}]`

Differentiëren

Je kunt op twee manieren een functie differentiëren.

De eerste gaat als volgt:

```
f[x_] := x^2 + x;
```

```
f'[x]
```

$1 + 2x$

De tweede manier is wat algemener en gaat met behulp van de *Mathematica* operator `D`.

```
D[f[x], x]
```

$1 + 2x$

Dit geeft de eerste afgeleide naar x . In het volgende voorbeeld differentiëren we eerst twee keer naar x en dan een keer naar y .

```
D[f[x], {x, 2}]
```

2

```
D[f[x], y]
```

0

▼ Help!

Dit was een korte uiteenzetting van wat algemene zaken die handig zijn bij het maken van de notebooks. Je zult echter meer hulp nodig hebben. Binnen *Mathematica* bevindt zich een handige help functie. Als je bijvoorbeeld niet meer weet hoe **Solve** werkt dan typ je in een opdrachtregel het volgende: **?Solve**. Als je wilt weten welke opties je **Solve** kunt meegeven dan typ je **??Solve**.

Ook kun je rechts in de menubalk het knopje *Help* -> *Help...* vinden en zo uitgebreider zoeken.

Voorbeeld

▼ Twee-deeltjes botsing

Twee deeltjes A en B bewegen naar elkaar toe parallel aan de x -as en botsen met elkaar, waarbij B aanvankelijk in rust is en A de snelheid $v_A = 4 \text{ m/s}$ heeft. De massa's zijn $m_A = 0.5 \text{ kg}$ en $m_B = 0.3 \text{ kg}$. Zie figuur 2.

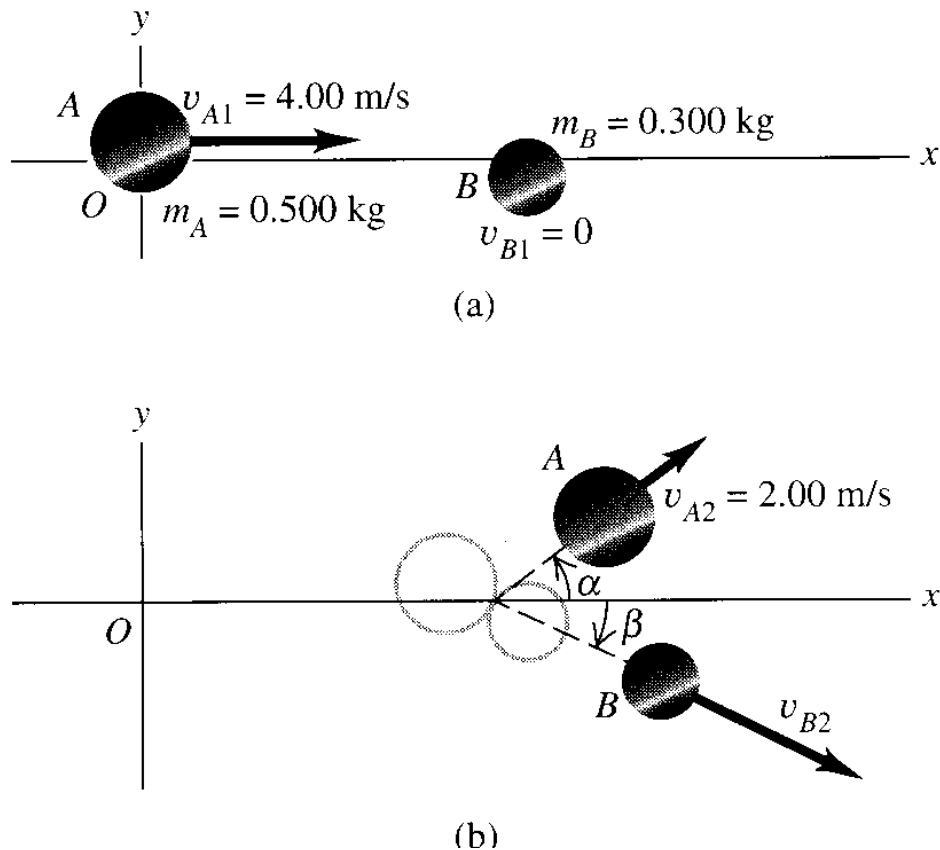


Figure 2

▼ Eindsnelheid van B

We berekenen de snelheid v_B na de botsing gegeven dat $v_A = 2 \text{ m/s}$ op dat moment. Noem de snelheid van A en B voor de botsing v_{A1} en v_{B1} , respectievelijk. We definiëren eerst de kinetische energie van de deeltjes; we gebruiken hiervoor het symbool K .

$$K_{A1} = \frac{1}{2} m_A v_{A1}^2$$

$$K_{B1} = 0$$

$$\frac{1}{2} m_A v_{A1}^2$$

$$0$$

De totale kinetische energie voor de botsing is:

$$K_1 = K_{A1} + K_{B1}$$

$$\frac{1}{2} m_A v_{A1}^2$$

Op dezelfde manier definiëren we de kinetische energie na de botsing:

$$K_{A2} = \frac{1}{2} m_A v_{A2}^2$$

$$K_{B2} = \frac{1}{2} m_B v_{B2}^2$$

$$K_2 = K_{A2} + K_{B2}$$

$$\frac{1}{2} m_A v_{A2}^2$$

$$\frac{1}{2} m_B v_{B2}^2$$

$$\frac{1}{2} m_A v_{A2}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{B2}^2$$

Omdat energie behouden is geldt dat de kinetische energie voor de botsing gelijk is aan die na de botsing:

$$K_1 = K_2$$

$$\frac{1}{2} m_A v_{A1}^2 = \frac{1}{2} m_A v_{A2}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{B2}^2$$

Deze vergelijking kunnen we oplossen naar de snelheid van deeltje B na de botsing (positieve oplossing)


```
Solve[verg, vB2]
```

$$\left\{ \left\{ v_{B2} \rightarrow -\frac{\sqrt{m_A} \sqrt{v_{A1}^2 - v_{A2}^2}}{\sqrt{m_B}} \right\}, \left\{ v_{B2} \rightarrow \frac{\sqrt{m_A} \sqrt{v_{A1}^2 - v_{A2}^2}}{\sqrt{m_B}} \right\} \right\}$$

```
vB2 = vB2 /. Last[%]
```

$$\frac{\sqrt{m_A} \sqrt{v_{A1}^2 - v_{A2}^2}}{\sqrt{m_B}}$$

We vullen nu de gegeven waarden in:

```
vA1 = 4 meter / s
vA2 = 2 meter / s
mA = 0.5 kg
mB = 0.3 kg
```

$$\frac{4 \text{ meter}}{\text{s}}$$

$$\frac{2 \text{ meter}}{\text{s}}$$

$$0.5 \text{ kg}$$

$$0.3 \text{ kg}$$

De eindsnelheid van B is dus:

```
PowerExpand[vB2]
```

$$\frac{4.47214 \text{ meter}}{\text{s}}$$

▼ Botsinghoeken

We kunnen de hoeken die v_A en v_B na de botsing maken met de x -as berekenen uit impulsbehoud. De impuls is een vector met (in dit geval) twee componenten. Voor de botsing heeft de impuls van deeltje A de x -component:

```
Remove["Global`*"]
```

$$p_{A1,x} = m_A v_{A1};$$

en na de botsing, waarbij α de hoek met de x -as is

$$p_{A2,x} = m_A v_{A2} \cos[\alpha];$$

Geheel analoog

$$p_{B2,x} = m_B v_{B2} \cos[\beta];$$

De y -componenten worden gegeven door:

$$\begin{aligned} p_{A1,y} &= 0; \\ p_{A2,y} &= m_A v_{A2} \sin[\alpha]; \\ p_{B2,y} &= m_B v_{B2} \sin[\beta]; \end{aligned}$$

We nemen het resultaat van hierboven over:

$$v_{B2} = \sqrt{\frac{m_A}{m_B} (v_{A1}^2 - v_{A2}^2)};$$

Impulsbehoud geeft nu twee vergelijkingen, omdat ieder van de twee componenten in de x -richting en de y -richting apart behouden is.

$$vg1 = \{p_{A1,x} == p_{A2,x} + p_{B2,x}, p_{A1,y} == p_{A2,y} + p_{B2,y}\}$$

$$\begin{aligned} \left\{ m_A v_{A1} == \cos(\beta) \sqrt{\frac{m_A (v_{A1}^2 - v_{A2}^2)}{m_B}} m_B + \cos(\alpha) m_A v_{A2}, \right. \\ \left. 0 == \sin(\beta) \sqrt{\frac{m_A (v_{A1}^2 - v_{A2}^2)}{m_B}} m_B + \sin(\alpha) m_A v_{A2} \right\} \end{aligned}$$

Dit zijn twee vergelijkingen waaruit we de hoeken α en β kunnen vinden

```
op1 = Solve[ vgl, {α, β} ]
```

Solve::ifun : Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not be found.

$$\left\{ \left\{ \beta \rightarrow \cos^{-1} \left(\frac{1}{m_A (2 v_{A1}^2 - 2 v_{A2}^2)} \left(- \frac{m_A \sqrt{\frac{m_A (v_{A1}^2 - v_{A2}^2)}{m_B}} v_{A2}^2}{v_{A1}} - \frac{m_B \sqrt{\frac{m_A (v_{A1}^2 - v_{A2}^2)}{m_B}} v_{A2}^2}{v_{A1}} + m_A v_{A1} \sqrt{\frac{m_A (v_{A1}^2 - v_{A2}^2)}{m_B}} + m_B v_{A1} \sqrt{\frac{m_A (v_{A1}^2 - v_{A2}^2)}{m_B}} \right) \right) \right\} \right\}$$

$$\alpha \rightarrow \cos^{-1} \left(\frac{m_A v_{A1}^2 - m_B v_{A1}^2 + m_A v_{A2}^2 + m_B v_{A2}^2}{2 m_A v_{A1} v_{A2}} \right) \right\}$$

We vullen de getallen in; voor het gemak laten we de eenheden weg.

```
vA1 = 4;
vA2 = 2;
mA = 0.5;
mB = 0.3;
```

```
op1
```

```
{{β → 0.463648, α → 0.643501}}
```

Vraagstukken

Aanwijzingen voor het oplossen van vraagstukken..

Nothing beats thinking!

Voor het oplossen van natuurkundige vraagstukken bestaan geen vaste voorschriften. Toch is het verstandig een aantal regels te volgen:

Bezint eer gij begint:

Lees de vraagstelling zorgvuldig door. Probeer de natuurkunde van het probleem te begrijpen voordat je *Mathematica* erop los laat. Geef aan welke variabelen in het probleem gegeven zijn en welke gevraagd worden.

Probleemstelling:

Begin een uitwerking met een omschrijving van de probleemstelling in je eigen woorden en geef aan welke variabelen in het probleem gegeven zijn en welke gevraagd worden.

Teken figuur:

Teken voor jezelf een diagram om het probleem te verduidelijken.

Veronderstellingen:

Ga na wat de veronderstellingen zijn; wees niet bang zelf een veronderstelling te formuleren. Het is vaak mogelijk om een eerste schatting van de numerieke uitkomst te geven door vereenvoudigende veronderstellingen te maken.

Geef uitleg:

Geef in de uitwerking van een vraagstuk bij iedere stap steeds uitleg over wat je aan het doen bent en waarom. Je werk wordt daarop beoordeeld.

Dimensies:

Werk zoveel mogelijk met algebraïsche formules, met de numerieke constanten aangegeven door een symbool (h voor de constante van Planck, c voor de lichtsnelheid etc.). Dit heeft het voordeel dat de dimensies van de tussen-resultaten en het antwoord gecontroleerd kunnen worden.

Onderwerp alle belangrijke uitdrukkingen aan deze controle. Laat dit zien in de uitwerking.

Gebruik wat je weet:

Bekijk alle uitkomsten kritisch en vergelijk eventueel met een ander resultaat dat bekend is. Lijkt het antwoord plausibel? Schrijf je conclusie op.

Tenslotte, hou het ordelijk!

Bedenk dat je niet schrijft voor jezelf maar voor iemand anders.

1. Trage Massa [4 pu]

Twee speelgoedwagentjes zijn aan elkaar verbonden door een stukje touw. Er wordt een ingedrukte veer tussen de wagentjes gebracht. Als het touwtje wordt doorgeknipt ontspant de veer en krijgen de twee wagentjes snelheden v_1 en v_2 . In een dergelijk experiment wordt gevonden dat de snelheden van wagen 1 en 2 respectievelijk 0.6 m/s en 0.3 m/s zijn.

Als het experiment wordt herhaald met wagentjes 1 en 3, zijn de snelheden 0.4 en 0.5 m/s. Als het experiment wordt gedaan met wagens 2 en 3 dan heeft wagen 2 een snelheid van 0.8 m/s.

1.1 Wat is de snelheid van wagen 3?

1.2 Als wagen 1 een massa m_1 heeft van 2 kg, wat zijn dan de massas m_2 en m_3 van de wagens 2 en 3?

1.3 Laat nu de wagentjes elastisch met elkaar botsen. Welke beginsnelheden moeten we geven opdat de gegeven eindsnelheden worden bereikt? Veronderstel dat de eindsnelheden ook tegengesteld gericht zijn.

- 1.4 Gewicht wordt gewoonlijk bepaald met een weegschaal. Kunnen botsingexperimenten ook dienen om het gewicht van voorwerpen te bepalen?

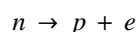
2. Terugslag [4 pu]

Vanuit een geweer met massa 0.80 kg wordt een kogel afgeschoten met massa 0.016 kg en snelheid 700 m/s.

- 2.1 Geef de verhouding van de snelheden van geweer en kogel in termen van de verhouding van hun massa's.
- 2.2 Bereken de snelheid van de terugslag van het geweer.
- 2.3 Bereken de kinetische energie van het geweer en de kogel.
- 2.4 Volgens Newton is actie gelijk aan reactie. Hoe verklaar je dan dat de terugslag van het geweer veel minder effect heeft op het menselijk lichaam dan de inslag van de kogel?

3. Neutron verval [6 pu]

Men neemt waar dat radioactieve atoomkernen spontaan kunnen vervallen. Een specifiek radioactief proces is het verval van een neutron (n) in een radioactieve kern in een proton (p) waarbij een electron (e) vrijkomt.



Dit noemt men *bèta-verval*. Als het electron het enige vrijkomende deeltje zou zijn in bèta-verval, dan zou dit electron steeds dezelfde energie moeten hebben.

In experimenten (Henri Becquerel 1900 en James Chadwick 1914) wordt echter waargenomen dat electronen niet mono-energetisch zijn. Dit gaf Niels Bohr aanleiding in 1930 te veronderstellen dat misschien energie niet behouden zou kunnen zijn in kernreacties. Wolfgang Pauli kwam met een andere oplossing, namelijk dat er nog een derde deeltje moest zijn. Dit deeltje moest neutraal zijn, vanwege ladingsbehoud, hetgeen verklaarde waarom het in experimenten niet waargenomen werd.

Het heeft tot 1956 geduurd voordat dit onbekende deeltje, door Fermi inmiddels *neutrino* genoemd, daadwerkelijk gedetecteerd werd in een experiment. Maar natuurkundigen hadden zoveel vertrouwen in behoudswetten dat niemand voordien enige twijfel had dat het neutrino gevonden zou worden.

Om dit probleem wat nader te bekijken, beschouwen we het beta-verval van een neutron in rust. Na verval neemt men een proton p en een electron e waar.

- De waargenomen snelheden van p en e zijn veel kleiner dan de lichtsnelheid.
- Gegeven is

$$\frac{m_n}{m_e} = 1838.6 \qquad \frac{m_p}{m_e} = 1836.1$$

- 3.1** Toon eerst aan dat dit proces met de impuls van p langs de positieve x -as en de impuls van e langs de negatieve x -as, zou leiden tot een snelheid groter dan de lichtsnelheid. Dit leidt tot het vermoeden van Pauli dat er een extra deeltje uitgezonden wordt. Dit zou het neutrino moeten zijn, een deeltje zonder massa.
- 3.2** Een neutrino met energie E heeft, net als een foton, een impuls E/c . Stel dat dit deeltje wordt uitgezonden langs de positieve x -as. De snelheden van proton en electron kunnen dan in het x - y vlak liggen. Bereken v_p voor het geval dat p en het neutrino nu langs de x -as uitgezonden worden en het electron in rust is. Neem voor de eenvoud ook $m_n = m_p$.
- 3.3** Beredeneer dat de berekening van v_p de voorspelling van het neutrino plausibel maakt.

4. Relativiteitsprincipe (geen Mathematica nodig) [6 pu]

Als we in een trein de ogen sluiten dan kunnen we ons afvragen of het wel zeker is dat de trein eenparig beweegt. We merken aan het geluid en de schokken dat dit het geval is maar hoe hard de trein rijdt kunnen we alleen afleiden uit de hoeveelheid geruis. Als die heel klein is zoals in de TGV dan hebben we nauwelijks het idee dat we met 300 km/uur door het Franse landschap snellen. Maar als de trein gaat remmen dan voelen we dat direct. Kennelijk is versnelling of vertraging direct waarneembaar maar eenparige snelheid niet.

Het is een algemeen principe van de natuurkunde dat eenparige snelheid geen absolute betekenis heeft, alleen een relatieve. Dit heeft te maken met het feit dat de traagheidswet blijft gelden als we eenparig bewegen. Of anders gezegd de behoudswet van impuls blijft geldig.

Beschouw een elastische botsing tussen twee deeltjes met massa m_1 en m_2 , waarop geen krachten werken. Er geldt dus impulsbehoud. Doe nu hetzelfde experiment in een bewegende trein.

- 4.1** Laat zien hoe de gemeten impuls van ieder van de deeltjes afhangt van de snelheid van de trein, maar dat de totale impuls nog steeds behouden is.
- 4.2** Laat nu zien dat de krachten F_{12} van deeltje 2 op deeltje 1 en F_{21} van deeltje 1 op deeltje 2 niet afhankelijk zijn van de snelheid van de trein.

Op grond van deze redeneringen trekken we de volgende conclusie:

als de bewegingsvergelijkingen van Newton geldig zijn in een gegeven coördinatenstelsel, dan zijn dezelfde vergelijkingen geldig in ieder coördinatenstelsel dat eenparig beweegt t.o.v. het gegeven stelsel. Snelheid heeft geen absolute betekenis. Dit is het relativiteitsprincipe van de klassieke mechanica, dat al door Galilei is ontdekt. De fundamentele veronderstelling van de relativiteitstheorie van Einstein is dat het relativiteitsprincipe van toepassing is op alle natuurkundige verschijnselen.

De liefhebber van wiskundige formuleringen gaat nog even door:

de positie van een deeltje wordt gemeten t.o.v. twee coördinatenstelsels O en O' die bewegen met een onderlinge constante snelheid V . Stel dat op tijd t het deeltje zich bevindt op plaats $r(t)$ t.o.v. O .

- 4.3 Laat zien dat de positie van dit deeltje t.o.v. O' gegeven wordt door

$$r' = r - Vt$$

aangenomen dat op $t = 0$ de oorsprong van beide assenstelsels samenvallen. Dit verband heet een *Galilei transformatie*.

- 4.4 Laat nu zien dat de vergelijkingen van Newton invariant zijn (= niet veranderen) onder een **Galilei**-transformatie. In de natuurkunde noemt men dit een "symmetrie".

Eenheden en Constanten

eenheden

lengte :	meter	m
tijd :	seconde	s
massa :	kilogram	kg
kracht :	Newton	$N = \text{kg m s}^{-2}$
arbeid / energie :	Joule	$J = \text{kg m}^2 \text{s}^{-2} = \text{Nm}$
	electronvolt	$1 \text{ eV} = 1.60218 \times 10^{-19} \text{ J}$
	megaelectronvolt	$1 \text{ MeV} = 1.60218 \times 10^{-13} \text{ J}$
vermogen :	Watt	$W = \text{kg m}^2 \text{s}^{-3} = \text{J s}^{-1}$
frequentie :	Hertz	$\text{Hz} = \text{s}^{-1}$

fundamentele constanten

gravitatie constante	$G = 6.670 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$
lichtsnelheid :	$c = 2.998 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
constante van Planck :	$h / 2\pi = 1.0545 \times 10^{-34} \text{ J s}$
valversnelling :	$g = 9.7805 \text{ m s}^{-2}$
electronmassa :	$m_e = 9.1091 \times 10^{-31} \text{ kg}$
protonmassa :	$m_p = 1.6725 \times 10^{-27} \text{ kg}$
neutronmassa :	$m_n = 1.6749 \times 10^{-27} \text{ kg}$

Literatuur

[AF] M. Alonso en E.J. Finn, *Physics*, Addison-Wesley Publishing Company, 1992.

- [H] A. Hobson, Physics, *Concept and Connections*, Prentice Hall, 1995.
- [YF] H.D. Young en R.A. Freedman, *University Physics*, Addison-Wesley, 1996.
- [W] S. Wolfram, *Mathematica*, Cambridge University Press, 3rd edition, 1996.