
NATUURKUNDE 2

Mechanica: Evolutie

*Stel er zou een intelligent wezen zijn die alles zou begrijpen
van de krachten die de natuur in beweging houden,
en ook de posities van alles wat in de natuur bestaat.
Als de intelligentie van dit wezen bovendien groot genoeg zou zijn
om deze gegevens te analyseren, dan zou het in dezelfde formule
zowel de beweging van de grootste lichamen in de natuur
en die van het atoom kunnen bevatten; voor dit wezen zou niets onzeker zijn,
en de toekomst en het verleden zouden voor dit wezen zichtbaar zijn.*

Pierre Simon de Laplace (1749-1827)

Kernbegrippen

$$F = \frac{d P}{d t}$$

begincondities(– voorwaarden)

bewegingsvergelijking

chaos

dynamisch model

faseruimte

harmonische oscillator

niet – lineaire dynamica

Inleiding

▼ Evolutie

Voor een gegeven kracht wordt de tweede wet van Newton een differentiaal-vergelijking in de tijd, de z.g. *bewegingsvergelijking*, die in principe de evolutie van het systeem volledig bepaalt. Omdat deze bewegingsvergelijking van de tweede orde in de tijd is bevat de oplossing, als die gevonden kan worden, nog twee onbepaalde constanten. Deze constanten, en daarmee de oplossing, worden uniek vastgelegd door de positie en de snelheid van het systeem op een bepaald tijdstip voor te schrijven. Dit noemt men de *begincondities of beginvoorwaarden*.

Er zijn weinig systemen in de natuurkunde waarvoor de bewegingsvergelijking exact oplosbaar is. Voorbeelden zijn:

- een vrij deeltje,
- een deeltje in een zwaartekrachtsveld,
- twee deeltjes probleem,
- een deeltje in een harmonische potentiaal.

Dit laatste model zullen we in dit hoofdstuk nader bekijken, niet alleen omdat het exact oplosbaar is maar ook omdat de harmonische oscillator een model-systeem is voor een deeltje in een gebonden toestand.

▼ Harmonische beweging

Veel verschijnselen in de natuur kunnen bij benadering als harmonische trillingen beschreven worden. De kracht is dan een lineaire functie van de uitwijking. Voorbeelden van trillingen die bij benadering harmonisch zijn, worden gevonden in

- de beweging van een slinger voor kleine uitwijkingen,
- elastische veersystemen,
- atomen in een kristal rooster,
- de nucleonen in een kern.

Niet-harmonische trillingspatronen kunnen door een Fourier analyse ontbonden worden in een superpositie van eenvoudige harmonische trillingen met verschillende frequenties. Zo kunnen op basis van harmonische trillingen gecompliceerdere trillingsprocessen begrepen worden, zoals gedempte en gedwongen trillingen.

▼ Niet-lineaire dynamica

Vaak is de harmonische trilling slechts een benadering. Veel trillingsverschijnselen in de natuur hebben een niet-lineair karakter, d.w.z. de kracht is een niet-lineaire functie van de uitwijking. Een typerend voorbeeld is de slinger. Voor grote uitwijkingen is de beweging wel periodiek maar niet harmonisch. De vergelijkingen voor zulke niet-lineaire systemen voldoen niet aan het superpositie principe, en in het algemeen zijn geen analytische oplossingen bekend. Oplossingen van dergelijke vergelijkingen zijn slechts met benaderings- en numerieke methoden te verkrijgen.

Henri Poincaré (1854-1912) heeft de aanzet gegeven tot een nieuwe aanpak van niet-lineaire systemen, waarin niet zozeer het oplossen van de vergelijkingen het doel is, maar het inzicht in de kwalitatieve en globale kenmerken van niet-lineaire systemen. In het moderne onderzoek van niet-lineaire systemen

spelen deze methoden een belangrijke rol in de analyse van numerieke oplossingen verkregen met de computer. Dit heeft o.a. geleid tot het inzicht dat volkomen deterministische systemen onder bepaalde omstandigheden volkomen onvoorspelbaar gedrag kunnen vertonen. Men spreekt van *chaotische systemen*. Een belangrijk voorbeeld van zo'n chaotisch systeem is het zonnestelsel. Het is gebleken dat de banen van drie deeltjes (of meer) onderhevig aan de zwaartekracht zeer irregulier gedrag kunnen vertonen. Een ander voorbeeld van een systeem met chaotisch gedrag is de dubbele slinger.

Theorie

▼ Harmonische oscillator

▼ Harmonische kracht

Eenvoudige harmonische beweging ontstaat als een systeem een trilling uitvoert rond een evenwichtspositie, waarbij de kracht naar de evenwichtspositie evenredig is met de uitwijking t.o.v. die evenwichtspositie

$$F = -k x \quad (1)$$

De kracht die wordt opgewekt door uitrekking van een elastisch lichaam, zoals een veer, heeft deze vorm. Dit staat bekend als de *wet van Hooke*. De veerconstante k is karakteristiek voor de elasticiteit van het materiaal.

Bewegingsvergelijking

Stel een massa m is opgehangen aan een veer met een lengte l en veerconstante k . Het systeem is in evenwicht als het gewicht stil hangt, d.w.z. als het gewicht precies even groot is als de tegenkracht van de veerspanning:

$$m g = k d \quad (2)$$

teweeggebracht door de uitrekking d van de veer.

Stel nu dat het systeem in trilling wordt gebracht. Als de uitwijking op een gegeven moment gelijk is aan x , dan is de uitrekking van de veer $d + x$. De totale kracht is dan gelijk aan

$$F = -k (d + x) + m g \quad (3)$$

Met de evenwichtsconditie en de tweede wet van Newton vinden we de tweede-orde differentiaalvergelijking

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k x \quad (4)$$

hetgeen geschreven kan worden als

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \quad (5)$$

Dit is de standaardvorm voor de bewegingsvergelijking van een harmonische oscillator met natuurlijke frequentie

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (6)$$

Het is eenvoudig te controleren dat ω_0 inderdaad de dimensie van frequentie heeft.

▽ Oplossing

De oplossing van de bewegingvergelijking van de harmonische oscillator is een superpositie van een sinus en een cosinus, zoals eenvoudig te controleren is door substitutie. Dit kan geschreven worden als

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta) \quad (7)$$

waarin A de amplitudo van de trilling is en θ de fase op tijdstip $t = 0$.

De oplossing van de bewegingvergelijking kan ook gevonden worden met *Mathematica*:

```
Remove["Global`*"]
dvg = x'[t] + ω02 x[t] == 0
```

$$\omega_0^2 x[t] + x''[t] == 0$$

```
opl = DSolve[{dvg, x'[0] == v0, x[0] == s0}, x[t], t]
```

$$\left\{ \left\{ x[t] \rightarrow \cos[t \omega_0] s_0 + \frac{\sin[t \omega_0] v_0}{\omega_0} \right\} \right\}$$

Ga na dat A en θ kunnen worden uitgedrukt in de beginwaarden $x_0 = x(t = 0)$ en $v_0 = v(t = 0)$.

▽ Energie

De bewegingvergelijking van de harmonische oscillator is een homogene differentiaal vergelijking van de tweede orde met constante coëfficiënten. We kunnen een eerste integraal van de vergelijking vinden door vermenigvuldiging met de integrerende factor $2 dx/dt$. Dit geeft

$$2 \frac{dx}{dt} d^2 \frac{x}{dt^2} + 2 \omega_0^2 x \frac{dx}{dt} = 0 \quad (8)$$

hetgeen we kunnen schrijven als

$$\left(\frac{d}{dt} \right) \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \omega_0^2 x^2 \right] = 0 \quad (9)$$

De eerste integraal hiervan is de bewegingconstante

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \omega_0^2 x^2 = \text{const} \quad (10)$$

Deze speciale combinatie van de snelheid $v = dx/dt$ en de positie x heeft dezelfde waarde op ieder tijdstip. Na vermenigvuldiging met de factor $m/2$, herkennen we deze bewegingsconstante als de energie

$$E = T + V \quad (11)$$

van de harmonische oscillator.

- De eerste term in het rechterlid is de kinetische energie

$$T = \frac{1}{2} m v^2 \quad (12)$$

- en de tweede term de potentiële energie

$$V = \frac{1}{2} k x^2 \quad (13)$$

Deze is gelijk aan de arbeid die verricht moet worden

$$V = - \int F dx \quad (14)$$

$$\frac{dV}{dx} = -F \quad (15)$$

om de oscillator uit de evenwichtspositie naar positie x te brengen.

Door substitutie van de oplossing

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta) \quad (16)$$

in de uitdrukking voor de energie vinden we

$$E = \frac{1}{2} k A^2 \quad (17)$$

- De energie van een harmonische oscillator is dus evenredig met het kwadraat van de amplitudo.

▼ Anharmonische oscillator

De harmonische potentiaal is evenredig met het kwadraat van de uitwijking; zie formule (13). Beschouw nu een willekeurige potentiaalfunctie, die niet een parabool is, maar wel een minimum heeft bij $x = x_0$. Bijvoorbeeld, de potentiaal tussen atomen heeft een dergelijke vorm. We ontwikkelen $V(x)$ rond x_0 in een Taylorreeks:

$$V(x) = V(x_0) + (x - x_0) \left(\frac{dV}{dx} \right)_{x_0} + \left(\frac{1}{2} \right) (x - x_0)^2 \left(\frac{d^2V}{dx^2} \right)_{x_0} + \dots \quad (18)$$

tot op tweede orde. Door x_0 in het minimum te kiezen vervalt de tweede term en vinden we de harmonische approximatie voor $V(x)$:

$$V(x) = V(x_0) + \left(\frac{k}{2} \right) (x - x_0)^2 \quad (19)$$

met

$$k = \left(\frac{d^2V}{dx^2} \right)_{x_0} \quad (20)$$

De constante term kan weggelaten worden omdat deze geen effect heeft op de beweging. Als we x_0 in de oorsprong kiezen, heeft de tweede term precies de harmonische vorm. De constante k is positief omdat de potentiaal een minimum heeft. De volgende termen in de Taylorreeks geven anharmonische bijdragen van orde drie, vier of hoger:

$$V(x) = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{3!} k_3 x^3 + \frac{1}{4!} k_4 x^4 + \dots \quad (21)$$

- De slinger is een voorbeeld van een systeem met een anharmonische kracht;

$$V(\theta) = m g l (1 - \cos(\theta)) \quad (22)$$

zie het vraagstuk/voorbeeld van de slinger.

▼ Dynamisch systeem

▼ Faseruimte

Meetkundig kan de baan van een dynamisch systeem, d.w.z. de oplossing van de bewegingsvergelijking of een stelsel van bewegingsvergelijkingen, weergegeven worden in de z.g. faseruimte. Als het systeem n vrijheidsgraden heeft, is dit een $2n$ -dimensionale ruimte waarin de snelheden $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ worden uitgezet tegen de ruimtecoördinaten $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Een bewegend deeltje beschrijft een unieke baan in deze faseruimte die wordt vastgelegd door de begincondities (x_0, v_0) voor ieder deeltje. Voor verschillende begincondities volgt het fasepunt verschillende banen. Twee banen kunnen elkaar niet snijden omdat voor een gegeven beginconditie de baan uniek is. De verzameling van alle mogelijke banen staat bekend als het *faseportret* van een dynamisch systeem.

▼ Harmonische oscillator

Voor het geval van een deeltje met slechts één vrijheidsgraad, zoals de 1-dimensionale harmonische oscillator, is de faseruimte 2-dimensionaal. De mogelijke fasebanen worden vastgelegd door de energie

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2, \quad (23)$$

gevonden uit de eerste integraal, van het systeem. Deze energievergelijking voor de enkelvoudige harmonische oscillator kan geschreven worden in de vorm:

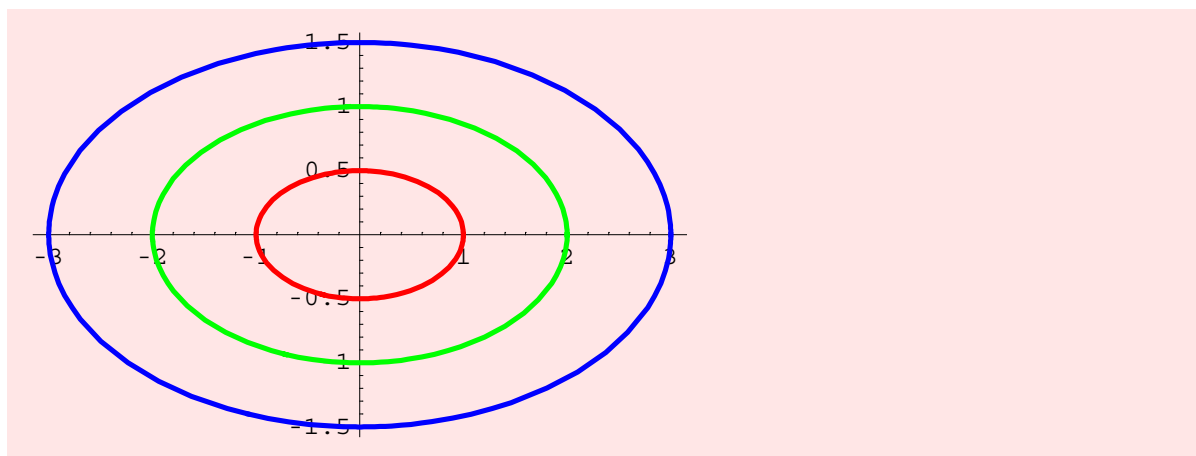
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \quad (24)$$

met de notatie $y = v$. In de faseruimte is dit een ellips met halve assen

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{2E}{k}} \\ b &= \sqrt{\frac{2E}{m}} \end{aligned} \quad (25)$$

- Het faseportret bestaat dus uit een verzameling concentrische ellipsen. Afhankelijk van de beginconditie loopt de baan rond op een van de ellipsen.

Faseportret van de harmonische oscillator



De ellipsen zijn groter naarmate de energie groter is. Zoals we verwachten snijden de ellipsen elkaar niet. De beweging loopt rond met de beweging van de klok en sluit op zichzelf omdat de beweging periodiek is.

▽ Dynamisch model

Lineaire zowel als niet- lineaire systemen worden beschreven door een stelsel van tweede-orde differentiaal vergelijkingen. Met de substitutie $y := (dx/dt)$ kan dit stelsel omgezet worden in een stelsel van gekoppelde eerste-orde differentiaal-vergelijkingen.

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{dt} \right) &= P(x, y) \\ \left(\frac{dy}{dt} \right) &= Q(x, y) \end{aligned} \quad (26)$$

- Dit noemen we een dynamische model.

Een voorbeeld is de gedempte harmonische oscillator

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -\omega_0^2 x - 2\beta y \end{aligned} \quad (27)$$

In dit geval zijn de vergelijkingen lineair en kunnen ook in matrixvorm geschreven worden:

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (28)$$

▽ Faseportret

Het faseportret van een dynamisch model is de verzameling van alle mogelijke banen in de faseruimte. Een aantal aspecten van het faseportret kunnen relatief eenvoudig onderzocht worden in de volgende stappen:

- Bepaal alle knooppunten (x^*, y^*) die voldoen aan de vergelijkingen

$$P(x, y) = 0, \quad Q(x, y) = 0 \quad (29)$$

- Lineariseer de vergelijkingen rond de knooppunten (x^*, y^*) . Dit lineaire stelsel beschrijft het karakter van de beweging rond de knooppunten en leidt tot een klassificatie van de knooppunten, zoals :

- nodaal afstotend, aantrekkend
- hyperbolisch (zadelpunt)
- focus afstotend, aantrekkend
- elliptisch

Zie de figuur.

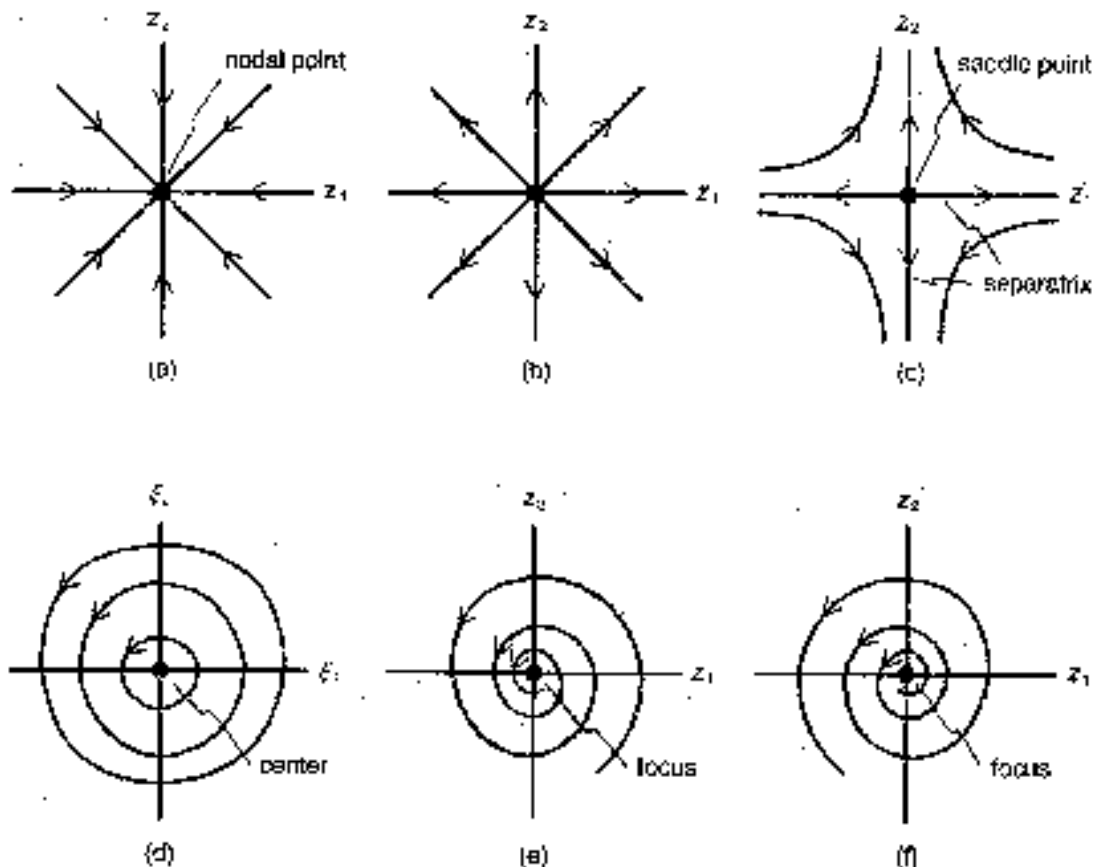


Figure 1

- De vergelijking

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} \quad (30)$$

geeft de raakrichting aan de banen van het systeem in de faseruimte. Het is nuttig een schets hiervan te maken in de faseruimte door voor een aantal punten de waarde van het rechterlid te bepalen. Dit geeft inzicht in het globale gedrag van het systeem en verbindt het lokale gedrag dat volgt uit de analyse van de knooppunten.

Gewoonlijk geven deze stappen voldoende informatie om het globale karakter van het faseportret vast te stellen.

Testvragen

▼ 1. Mechanisch evenwicht

Een voorwerp is in mechanisch evenwicht als de resulterende kracht en het resulterende koppel nul zijn. Welke van de volgende uitspraken is/zijn correct:

- ☐ Ieder voorwerp in mechanisch evenwicht is in rust.
- ☐ Een voorwerp in mechanisch evenwicht hoeft niet in rust te zijn.
- ☐ Een voorwerp in rust moet in evenwicht zijn.

▼ 2. Oscillatie

Een voorwerp kan oscilleren rond:

- ieder evenwichtspunt
- ieder stabiel evenwichtspunt
- bepaalde stabiele evenwichtspunten.
- ieder punt, mits de kracht gegeven wordt door de wet van Hooke.
- ieder punt.

▼ 3. Stabiel evenwicht

Welke van de volgende voorwaarden is noodzakelijk om een voorwerp te laten oscilleren?

- stabiel evenwicht.
- weinig of geen wrijving.
- een verstoring.

▽ 4. Harmonische trilling

Een massa verbonden met een veer trilt op en neer. Beschouw de volgende mogelijkheden: (i) op een gegeven moment gedurende de trilling heeft de massa geen snelheid maar is wel versneld (met positief of negatief teken); (ii) op een gegeven moment heeft de massa snelheid nul en versnelling nul.

beide toestanden komen voor gedurende een trillingstijd.

geen van twee komt voor.

alleen (i) komt voor.

▽ 5. Potentiële energie

Een voorwerp hangt in rust aan een veer. Als het voorwerp naar beneden getrokken wordt, neemt de som van de elastische potentiële energie van de veer en de zwaartekrachtspotentialaal tussen de aarde en het voorwerp:

toe.

af.

niet toe, niet af.

▽ 6. Zittend schommelen

Een persoon zit op een schommel. Als de persoon stil zit gaat de schommel heen en weer volgens de natuurlijke frequentie van het systeem. Stel er zitten nu twee personen op de schommel, dan is de natuurlijke frequentie:

groter.

gelijk.

kleiner.

▽ 7. Staand schommelen

Een persoon zit op een schommel. Als de persoon stil zit gaat de schommel heen en weer volgens de natuurlijke frequentie van het systeem. Stel de persoon gaat staan, dan zal de natuurlijke frequentie van de schommel:

groter worden.

gelijk blijven.

kleiner worden.

Mathematica

▼ Packages

Bij dit notebook heb je de volgende packages nodig:

```
<< VisualDSolve`
<< Graphics`Colors`
```

▼ Commando's

▼ Differentiaalvergelijkingen

Het invoeren van een differentiaalvergelijking gaat als volgt:

```
dvg = x''[t] + a^2 x[t] == 0
```

$$a^2 x[t] + x''[t] == 0$$

Waarbij $x''[t]$ de tweede afgeleide van x naar t voorstelt. (Let op het juiste accent! Dus ' en niet ')

▼ DSolve

Het oplossen van een differentiaalvergelijking gaat met behulp van **DSolve**.

```
op1 = DSolve[dvg, x[t], t]
```

```
{{x[t] -> C[2] Cos[a t] + C[1] Sin[a t]}}
```

DSolve lost nu de vergelijking op en laat de integratieconstanten staan. Door de beginvoorwaarden op te geven kan je ook de integratieconstanten $C[1]$ en $C[2]$ oplossen:

```
op1 = DSolve[{dvg, x'[0] == 0, x[0] == 1}, x[t], t]
```

```
{{x[t] -> Cos[a t]}}
```

▽ NDSolve

De meeste differentiaalvergelijkingen kun je niet exact oplossen. Mathematica heeft hiervoor een numerieke functie: **NDSolve**. De syntaxis is ongeveer gelijk aan die van **DSolve**.

```
dvgt =  $\theta''[t] + \sin[\theta[t]] == 0$ 
```

```
Sin[ $\theta[t]$ ] +  $\theta''[t] == 0$ 
```

```
DSolve[{dvgt,  $\theta'[0] == 0$ ,  $\theta[0] == 1$ },  $\theta[t]$ , t]
```

```
Solve::verif :
```

```
Potential solution { $\theta[t] \rightarrow \text{ComplexInfinity}$ } cannot be verified automatically. Verification may require use of limits.
```

```
Solve::ifun : Inverse functions are being
```

```
used by Solve, so some solutions may not be found.
```

```
Solve::verif :
```

```
Potential solution { $\theta[t] \rightarrow \text{ComplexInfinity}$ } cannot be verified automatically. Verification may require use of limits.
```

```
Solve::ifun : Inverse functions are being
```

```
used by Solve, so some solutions may not be found.
```

```
DSolve::dsing :
```

```
Unable to fit initial/boundary conditions { $\theta'[0] == 0$ ,  $\theta[0] == 1$ }
```

```
Solve::verif :
```

```
Potential solution { $\theta[t] \rightarrow \text{ComplexInfinity}$ } cannot be verified automatically. Verification may require use of limits.
```

```
General::stop : Further output of
```

```
Solve::verif will be suppressed during this calculation.
```

```
Solve::ifun : Inverse functions are being
```

```
used by Solve, so some solutions may not be found.
```

```
General::stop : Further output of
```

```
Solve::ifun will be suppressed during this calculation.
```

```
DSolve::dsing :
```

```
Unable to fit initial/boundary conditions { $\theta'[0] == 0$ ,  $\theta[0] == 1$ }
```

```
DSolve[{Sin[ $\theta[t]$ ] +  $\theta''[t] == 0$ ,  $\theta'[0] == 0$ ,  $\theta[0] == 1$ },  $\theta[t]$ , t]
```

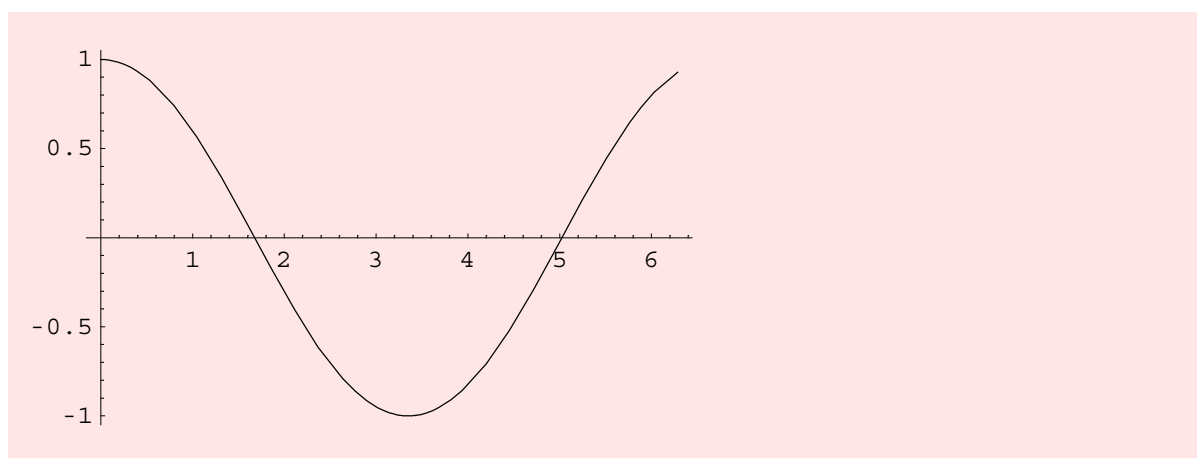
Dit gaat dus niet.

```
opl =  $\theta[t]$  /. NDSolve[{dvgt,  $\theta'[0] == 0$ ,  $\theta[0] == 1$ },  $\theta[t]$ , {t, 0,  $2\pi$ }]
```

```
{InterpolatingFunction[{{0., 6.28319}}], <>}[t]}
```

Plotten van de gevonden waarden gaat als volgt (zie ook **Plot**):

```
Plot[op1, {t, 0, 2 π}];
```



▼ Plot

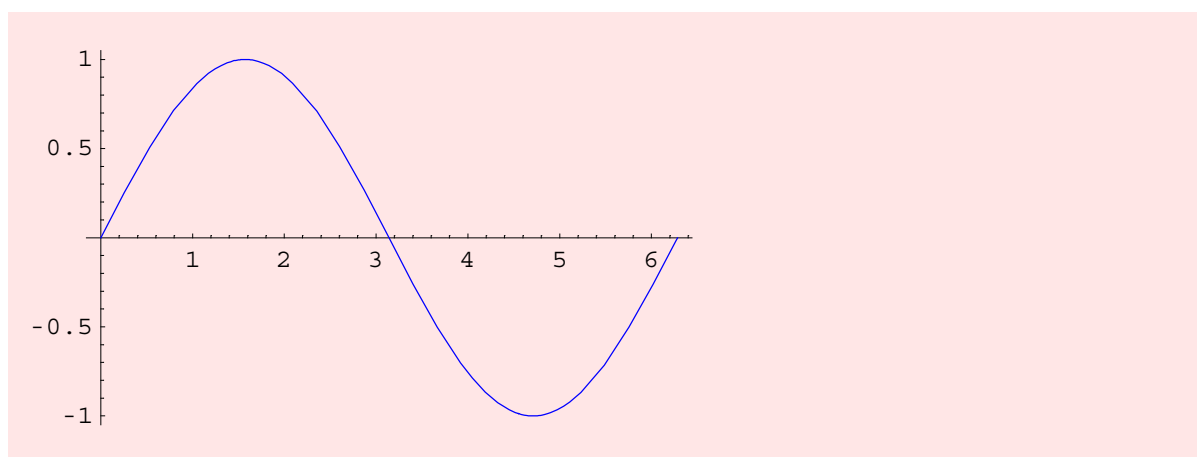
Het plotten van functies gaat met het commando **Plot**. Dit commando heeft minimaal twee argumenten nodig: de functie die geplot moet worden en een lijst met daarin de variabele en het bereik van de variabele.

In het voorbeeld wordt de functie $f(x) = \sin(x)$ met $x \in [0, 2\pi]$ geplot:

```
<< Graphics`Colors`
```

```
f[x_] := Sin[x]
```

```
Plot[f[x], {x, 0, 2 π}, PlotStyle -> Blue];
```

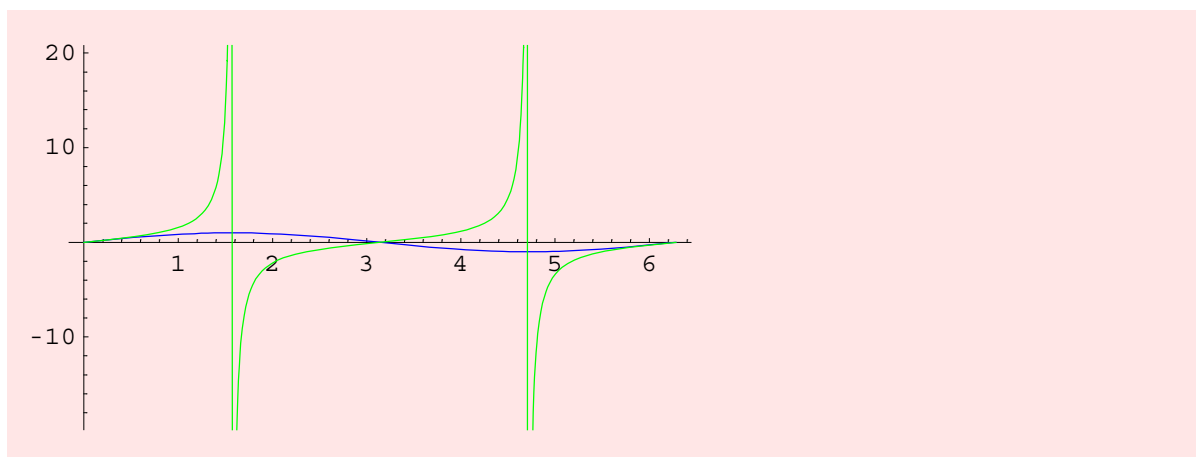


Met **PlotStyle** geef je opties op voor de plot; zoals de kleur van de grafiek (niet te zien in de printout).

Je kunt ook meerdere functies plotten. De functies worden dan opgegeven in een lijst. Ook de kleur-opties moeten in een lijst worden opgenomen.

```
g[x_] := Tan[x]
```

```
Plot[{f[x], g[x]}, {x, 0, 2  $\pi$ }, PlotStyle -> {Blue, Green}];
```



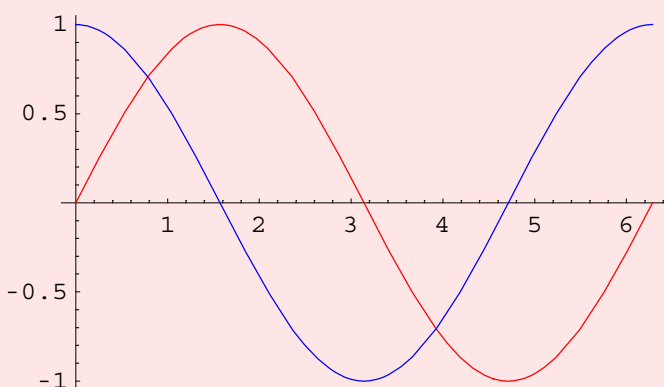
▽ Show

Dit commando is heel handig als je meerdere grafieken in een plot wilt weergeven. Door de optie **DisplayFunction->Identity** binnen **Plot** en de optie **DisplayFunction->\$DisplayFunction** binnen **Show** te gebruiken worden de grafieken pas met het aanroepen van **Show** getoond.

```
functie1[x_] := Sin[x];  
functie2[x_] := Cos[x];
```

```
grafiek1 =  
  Plot[functie1[x], {x, 0, 2  $\pi$ }, PlotStyle -> Red,  
    DisplayFunction -> Identity];  
grafiek2 =  
  Plot[functie2[x], {x, 0, 2  $\pi$ }, PlotStyle -> Blue,  
    DisplayFunction -> Identity];
```

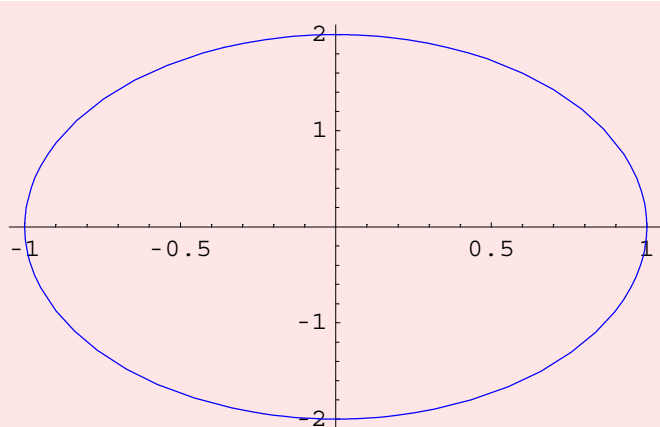
```
Show[grafiek1, grafiek2, DisplayFunction -> $DisplayFunction];
```



▽ ParametricPlot

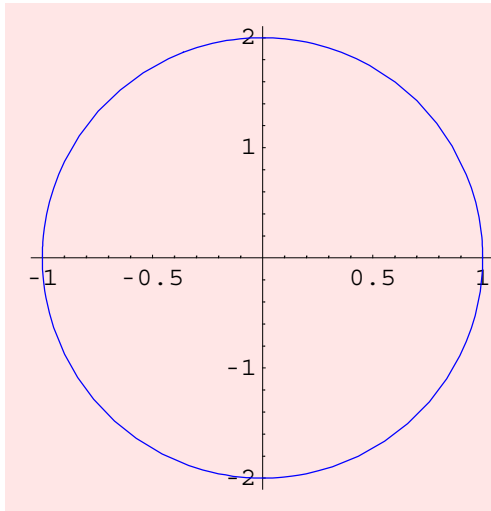
Een parametrisatie geeft voor de x- en de y-coördinaat een functievoorschrift, elk van dezelfde variabele afhankelijk.

```
X[t_] := Cos[t]
Y[t_] := 2 Sin[t]
ParametricPlot[{X[t], Y[t]}, {t, 0, 2 π}, PlotStyle -> Blue];
```



Met de optie **AspectRatio** geef je de verhoudingen van de hoogte en breedte van de plot.

```
ParametricPlot[{X[t], Y[t]},  
  {t, 0, 2  $\pi$ }, PlotStyle -> Blue, AspectRatio -> 1];
```



▽ PhasePlot

Van een bewegend deeltje kunnen we de positie x en snelheid v als functie van de tijd plotten, maar we kunnen ook de snelheid als functie van de positie in kaart brengen. Als t varieert, definiëren de punten $(x(t), v(t))$ curven, die de fasebanen van het deeltje worden genoemd. Om een globaal beeld te krijgen van de fasebanen, is het nuttig om de richting (de raakvector aan de fasebaan) te plotten. Dit noemt men een faseplot.

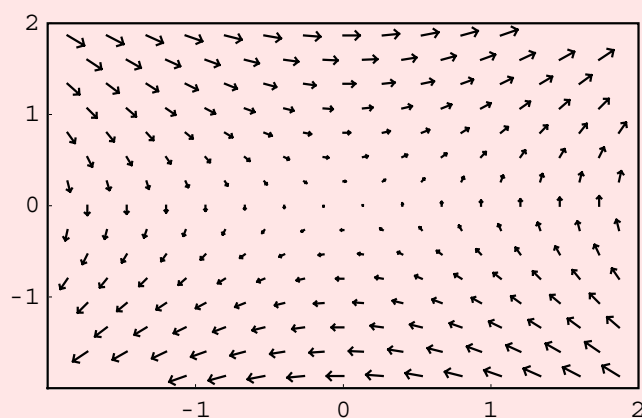
Voor het plotten van een faseplot gebruik je het commando **PhasePlot**. Stel we hebben het volgende stelsel differentiaalvergelijkingen:

```
<< VisualDSolve`
```

```
diffverg = {x'[t] == v[t], v'[t] == x[t]};
```

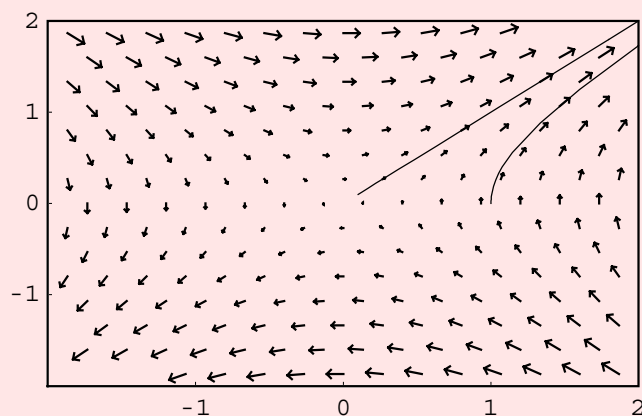
Hier maken we nu een faseplot van:


```
PhasePlot[diffverg, {x[t], v[t]},
  {t, 0, 2 Pi}, {x, -2, 2}, {v, -2, 2}, VectorField -> True];
```



We kunnen met de optie **InitialValues** fasebanen in de plot tekenen:

```
PhasePlot[diffverg, {x[t], v[t]}, {t, 0, 2 Pi}, {x, -2, 2}, {v, -2, 2},
  VectorField -> True, InitialValues -> {{0.1, 0.1}, {1, 0}}];
```



Hier zijn twee fasebanen getekend, een met beginwaarden $x(0) = 0.1$, $v(0) = 0.1$ en de ander met beginwaarden $x(0) = 1$, $v(0) = 0$. In beide gevallen loopt de tijd van $t = 0$ tot $t = 2\pi$.

Zie ook het voorbeeld verderop.

Voorbeelden

▼ Harmonische oscillator

```
Remove["Global`*"]
<< VisualDSolve`
```

We bekijken de bewegingsvergelijking van een harmonische oscillator, $\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$. Deze wordt als volgt in *Mathematica* gedefiniëerd,

```
dvg = x''[t] + ω02 x[t] == 0
```

```
ω02 x[t] + x''[t] == 0
```

De oplossing hiervan is

```
op1 = DSolve[ {dvg, x'[0] == v0, x[0] == s0}, x[t], t];
```

```
op1 = op1[[1]]
```

$$\{x[t] \rightarrow \cos[t \omega_0] s_0 + \frac{\sin[t \omega_0] v_0}{\omega_0}\}$$

De oplossing **op1** in de eerste regel, was een lijst binnen een lijst, de tweede regel verhelpt dit. We hadden ook **Flatten[op1]** kunnen gebruiken.

De uitwijking $x(t)$ hangt af van de begincondities, namelijk de beginpositie s_0 en de beginsnelheid v_0 , en van de tijd. We gebruiken de oplossing om nieuwe functies $X(t)$, voor de positie en $Y(t)$ voor de snelheid, te definiëren,

```
x[t_] = x[t] /. op1
```

De snelheid wordt verkregen door differentiatie van de plaats naar de tijd

```
y[t_] = x'[t]
```

$$\cos[t \omega_0] v_0 - \sin[t \omega_0] s_0 \omega_0$$

Als we ω_0 expliciet een waarde geven, b.v. $\omega_0 = \frac{1}{2}$, dan kunnen we de fasebanen van de harmonische oscillator weergeven in een (x,v) -plot voor verschillende beginwaarden. Alle fasebanen hebben de zelfde waarde voor ω_0 , maar moeten verschillende waarden hebben voor de beginpositie en snelheid. Daarom gebruiken we de substitutie methode om s_0 en v_0 een waarde te geven.

```
ω0 = 0.5;
```

```
fase1 = {X[t], Y[t]} /. {s0 -> 1, v0 -> 0};  
fase2 = {X[t], Y[t]} /. {s0 -> 2, v0 -> 0};  
fase3 = {X[t], Y[t]} /. {s0 -> 3, v0 -> 0};
```

Omdat de differentiaalvergelijking voor de harmonische oscillator zo eenvoudig is, kon hij analytisch worden opgelost met de **DSolve** functie. Vaak lukt dit niet en moet de oplossing numeriek worden bepaald. Dit kan in *Mathematica* met **NDSolve**. We illustreren dit door de oplossing **fase1** ook

numeriek uit te rekenen.

Nu moeten alle constanten in de differentiaalvergelijking een numerieke waarde hebben,

```
dvg
```

$$0.25 x[t] + x''[t] == 0$$

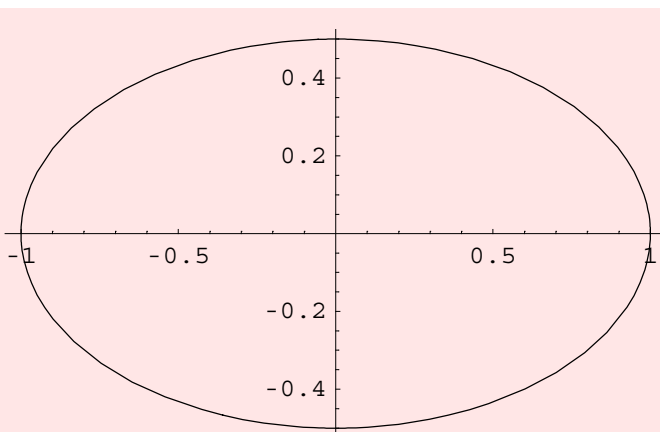
Dit is dus inderdaad het geval en we berekenen de oplossing voor de beginvoorwaarden $s_0 = x(0) = 1$ en $v_0 = x'(0) = 0$ die bij **fase1** horen,

```
oplN = NDSolve[ {dvg, x'[0] == 0, x[0] == 1}, x, {t, 0, 4 Pi}]
```

```
{{x -> InterpolatingFunction[{{0., 12.5664}}, <>]}}
```

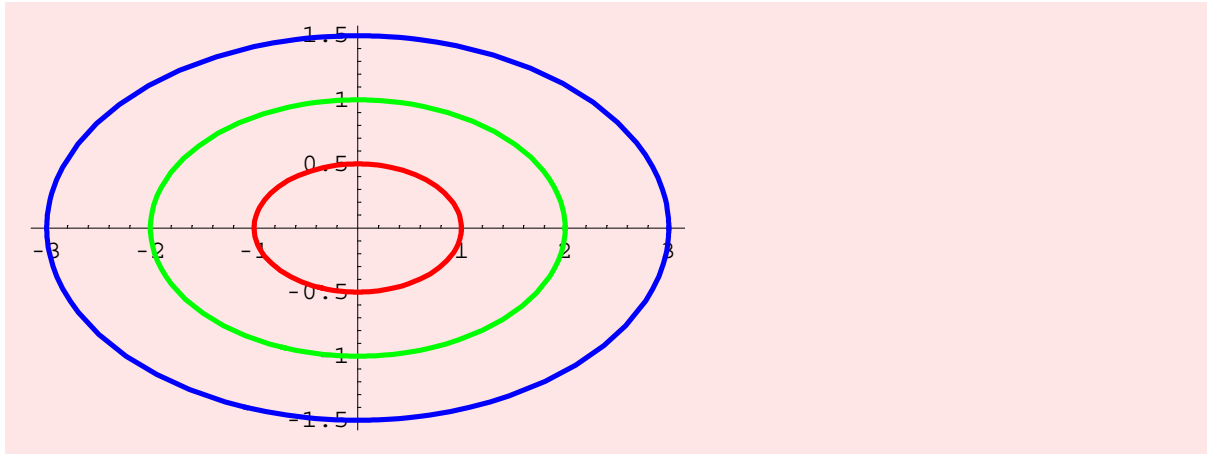
Net als hierboven, definiëren we functies voor de positie en de snelheid, door de substitutieregels in de oplossing toe te passen (vergeet de **Flatten** operatie niet) en ter controle plotten we die oplossing,

```
XN[t_] = x[t] /. Flatten[oplN];  
YN[t_] = XN'[t];  
fase1N = {XN[t], YN[t]};  
  
ParametricPlot[ fase1N, {t, 0, 4 Pi}];
```



Nu kunnen we ook een (fraaiere) plot maken van de drie geparametriseerde curven samen,

```
ParametricPlot[{fase1, fase2, fase3}, {t, 0, 4  $\pi$ }, PlotStyle ->
  {{Red, AbsoluteThickness[2]},
   {Green, AbsoluteThickness[2]}, {Blue, AbsoluteThickness[2]}}];
```



Wat verandert er als we 2π zouden kiezen of 8π voor de maximale t -waarde? Controleer ook dat **fase1** en **fase1N** het zelfde zijn.

Dit schetst het faseportret van een harmonische oscillator. Het laat zien dat de beweging van een harmonisch slingerend deeltje periodiek is in de tijd want de fase banen vormen gesloten krommen. De oorsprong is een knooppunt (het enige): als deze beginconditie wordt gekozen, d.w.z. $x(0) = 0$ en $x'(0) = 0$, dan blijft het systeem onveranderd in die toestand steken.

Vaak teken je behalve enkele fasebanen ook het richtingsveld van het bijpassende stelsel eerste-orde differentiaalvergelijkingen in de positie- en snelheidsfuncties. Daartoe transformeren we de oorspronkelijke tweede-orde differentiaalvergelijking:

dvg

$$0.25 x[t] + x''[t] == 0$$

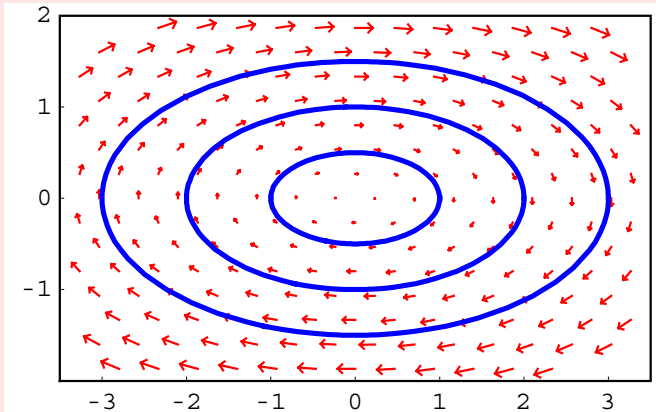
Het stelsel eerste-orde differentiaalvergelijkingen in de positie- en snelheidsfuncties dat hiermee correspondeert is:

$$\text{diffvgl} = \{x'[t] == v[t], v'[t] == -\omega_0^2 x[t]\}$$

$$\{x'[t] == v[t], v'[t] == -0.25 x[t]\}$$

Nu kan het richtingsveld met enkele oplossingskrommen getekend worden.

```
PhasePlot[diffvgl, {x[t], v[t]}, {t, 0, 4 π}, {x, -3.5, 3.5}, {v, -2, 2},
  InitialValues -> {{1, 0}, {2, 0}, {3, 0}}, VectorField -> True,
  PlotStyle -> {AbsoluteThickness[2], Blue}, FieldColor -> Red];
```



▼ Aangedreven harmonische oscillator

▼ Bewegingsvergelijking

Een harmonische oscillator heeft een natuurlijke frequentie ω_0 . We kunnen de oscillator een andere frequentie opleggen door het systeem te onderwerpen aan een periodieke kracht met een frequentie Ω . De bewegingsvergelijking ziet er nu als volgt uit:

```
Remove["Global`*"]
eq = x''[t] + ω02 x[t] == b Sin[Ω t]
```

Remove::rmnsm : There are no symbols matching "Global`*".

$$\omega_0^2 x[t] + x''[t] == b \sin[\Omega t]$$

Hierin is b de amplitude van de verstorende externe kracht. Als de externe frequentie dicht bij de natuurlijke frequentie ligt, zal resonantie optreden.

De vergelijking kan numeriek worden opgelost. Om resonantie te vermijden nemen we de parameters ω_0 en Ω ongelijk:

```
ω0 = 1;
Ω = 1.35;
```

Voor de begincondities nemen we:

```
begincond = {x[0] == 1, x'[0] == 0}
```

```
{x[0] == 1, x'[0] == 0}
```

We hebben dus het volgende beginwaardeprobleem

```
bwp = {eq, begincond[[1]], begincond[[2]]}
```

$$\{x[t] + x''[t] == 0.2 \sin[1.35 t], x[0] == 1, x'[0] == 0\}$$

De amplitude b van de aandrijving kiezen we eerst klein

```
b = 0.2;
```

```
sol = DSolve[bwp, x[t], t]
```

$$\{\{x[t] \rightarrow 0.00303951 (329. \cos[t] + 108. \sin[t] - 80. \sin[1.35 t])\}\}$$

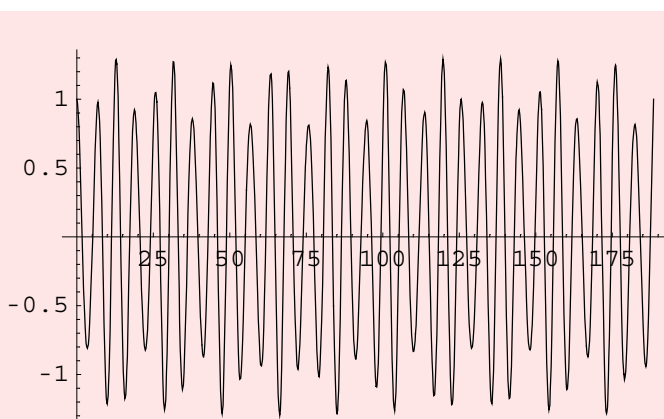
De uitwijking als functie van tijd:

```
X[t_] = x[t] /. sol[[1]]
```

$$0.00303951 (329. \cos[t] + 108. \sin[t] - 80. \sin[1.35 t])$$

De grafiek van deze functie teken je nu met **Plot**; bedenk voordat je dit commando uitvoert eerst eens zelf wat het gedrag zal zijn.

```
Plot[X[t], {t, 0, 60 \pi}];
```



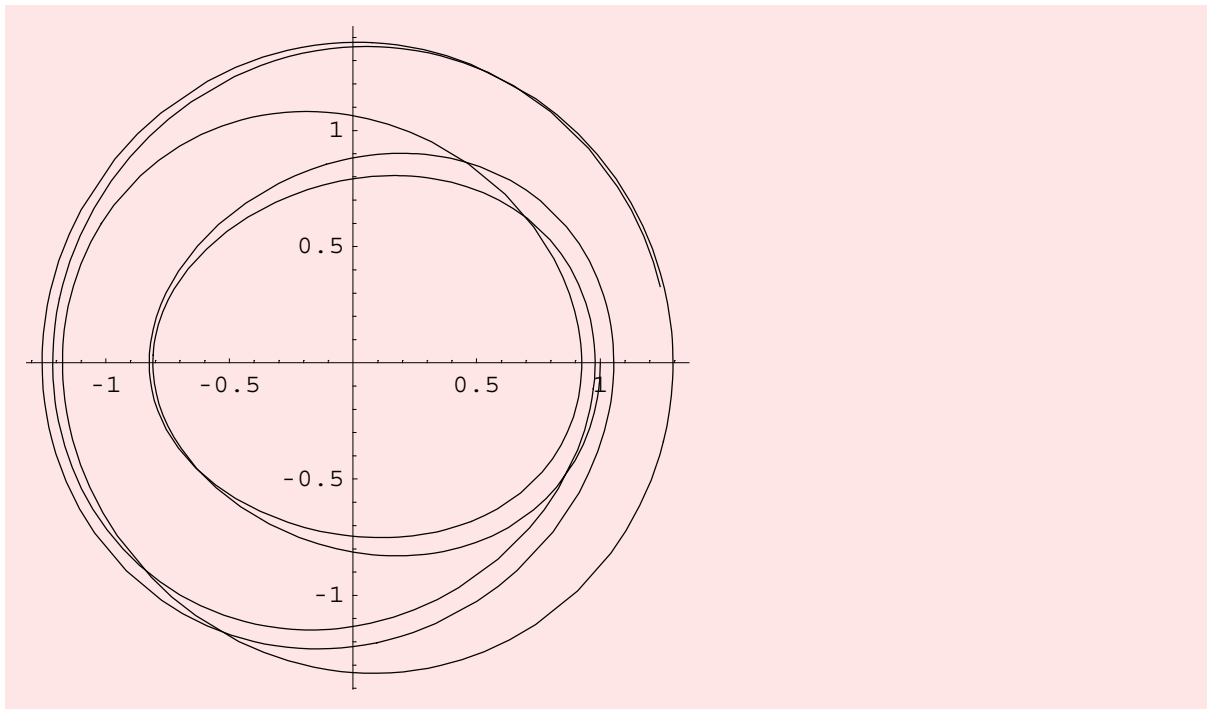
▼ Dynamisch model

We kunnen de beweging van de aangedreven harmonische oscillator ook representeren in een faseplot. We definiëren eerst de snelheid als functie van tijd

$$Y[t_]=X'[t]$$

$$0.00303951 (108. \cos[t] - 108. \cos[1.35 t] - 329. \sin[t])$$

```
ParametricPlot[{X[t], Y[t]}, {t, 0, 10 π}, AspectRatio -> 1];
```



Uit deze grafiek zien we dat de fasebanen zichzelf snijden ten gevolge van de invloed van de uitwendige kracht.

Door de dimensie van de faseruimte te vergroten kunnen we er voor zorgen dat de fasebanen elkaar niet meer snijden. We noemen de coördinaat van de uitwijking $x_1(t) = x(t)$ en geven de externe kracht een eigen vrijheidsgraad die we noteren als een nieuwe coördinaat $x_2(t) = b \sin(\Omega t)$. De differentiaalvergelijking voor de beweging is:

```
Remove["Global`*"]
```

$$eq = x''[t] + \omega_0^2 x[t] == b \sin[\Omega t]$$

$$\omega_0^2 x[t] + x''[t] == b \sin[t \Omega]$$

```
% /. {x -> x1, Last[%] -> x2[t]}
```

$$x_1(t) \omega_0^2 + x_1''(t) == x_2(t)$$

We hebben hier te maken met een 2-dimensionaal dynamisch model, nl.

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= y_1, & \frac{dy_1}{dt} &= x_2 - \omega_0^2 x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= y_2, & \frac{dy_2}{dt} &= -\Omega^2 x_2 \end{aligned}$$

Om de beweging van een dergelijk systeem met meerdere vrijheidsgraden grafisch op een overzichtelijke manier te kunnen weergeven, introduceert men de Poincaré afbeelding. We gaan hierop niet verder in; de liefhebber wordt verwezen naar een opgave in werkboek 7.

- Dit model voor de aangedreven harmonische oscillator is enigzins artificieel; in de praktijk zal een aangedreven oscillator of slinger altijd wrijving ondervinden waardoor deze na enige tijd gaat meelopen met de externe kracht.

▼ Dubbele slinger en chaos

De enkele slinger is bijna synoniem met een ordelijk systeem. In het verleden was de slinger het meest nauwkeurige instrument voor tijdaanwijzing. De mensheid heeft hieraan gedurende lange tijd de indruk ontleend dat de natuur ordelijk en voorspelbaar is.

De beweging van een dubbele slinger is echter allesbehalve ordelijk. Neem bijvoorbeeld de dubbele slinger die eenvoudig is opgebouwd uit twee gekoppelde slingers met ieder een massa m aan een massaloze stang van lengte l . De ene slinger heeft een vast ophangpunt terwijl het ophangpunt van de andere aan het uiteinde van de eerste vast zit (zie figuur).

Dubbele slinger

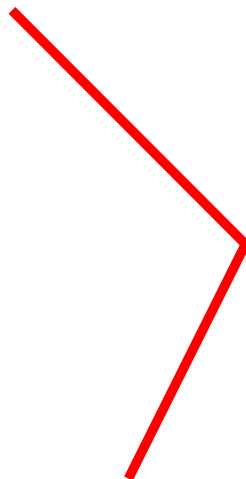


Figure 2

Voor het gemak van de berekeningen kiezen we zowel de beide massa's als beide lengtes gelijk aan elkaar:

$m_1 = m_2; m_2 = m; l_1 = l_2; l_1 = l$. Subindex 1 slaat op de slinger met het vaste ophangpunt en subindex 2 staat voor de andere slinger.

Het systeem wordt beschreven door een stelsel van twee gekoppelde differentiaalvergelijkingen voor de twee uitwijkingshoeken θ_1 en θ_2 die we de 'shoulder angle' en de 'elbow angle' noemen:

```
<< VisualDSolve`
```

$$\begin{aligned} \text{ode}_1 = & (3 + 2 \cos[\theta_2[t]]) \theta_1''[t] + (1 + \cos[\theta_2[t]]) \theta_2''[t] - 2 \sin[\theta_2[t]] \theta_1'[t] \\ & \theta_2'[t] - (\theta_2'[t])^2 \sin[\theta_2[t]] + \frac{g \sin[\theta_1[t] + \theta_2[t]]}{1} + 2 \frac{g \sin[\theta_1[t]]}{1} == 0; \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} \text{ode}_2 = & (1 + \cos[\theta_2[t]]) \theta_1''[t] + \\ & \theta_2''[t] + \sin[\theta_2[t]] (\theta_1'[t])^2 + \frac{g \sin[\theta_1[t] + \theta_2[t]]}{1} == 0; \end{aligned}$$

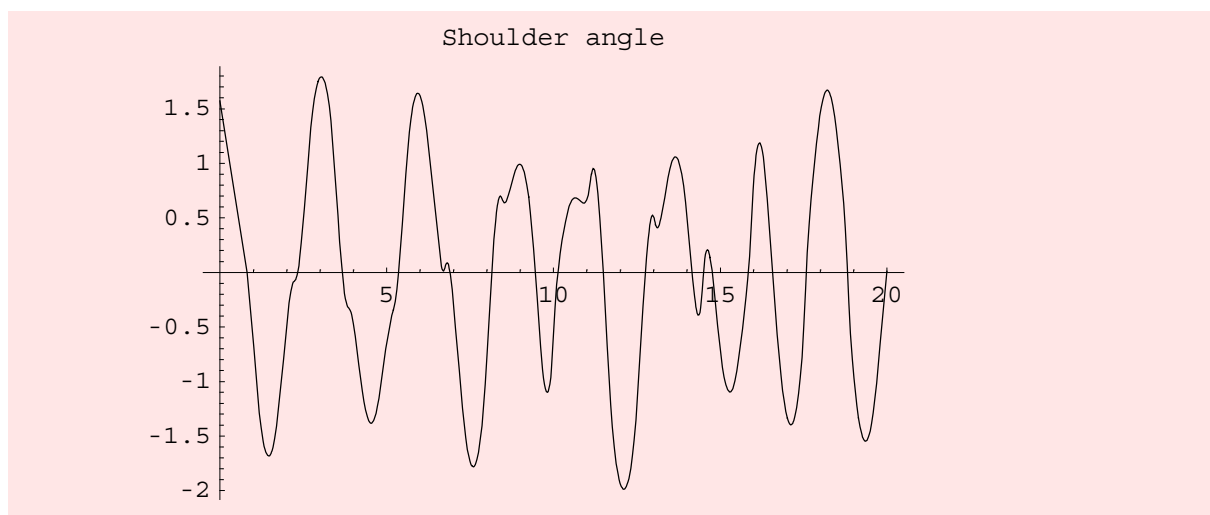
Merk op dat de massa's niet meer in de differentiaalvergelijkingen zitten. Deze twee gekoppelde differentiaalvergelijkingen zijn met *Mathematica*-routines numeriek op te lossen. De lengte is gekozen als $l := 1 \text{ m}$ en de zwaartekrachtsversnelling $g := 9.8 \text{ ms}^{-2}$. In de onderstaande figuren zijn de shoulder angle (θ_1) en de elbow angle (θ_2) beide als functie van de tijd weergegeven:

```
g = 9.8;
l = 1;
```

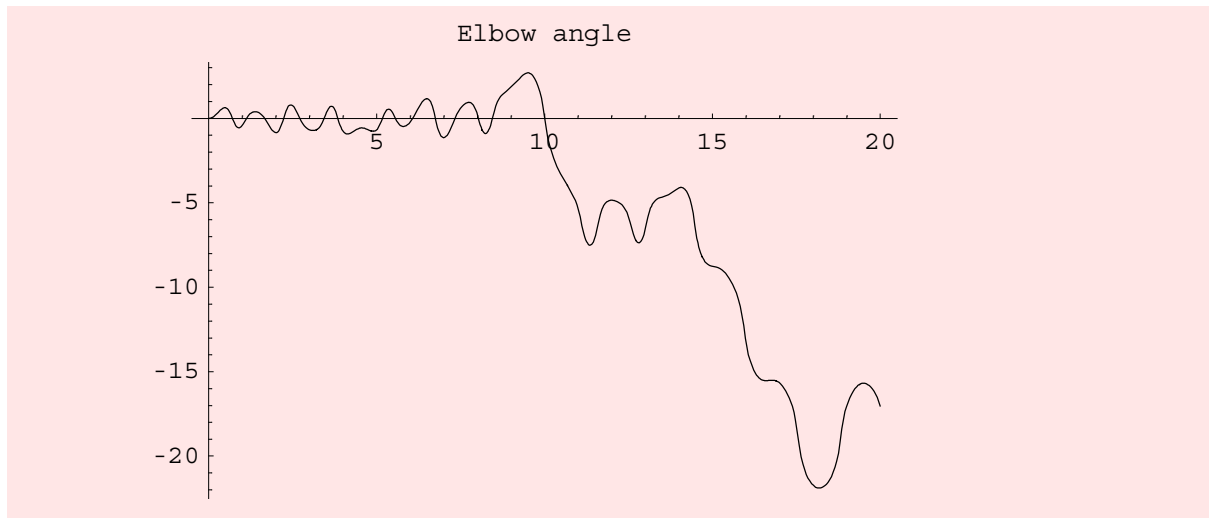
```
begincond = {  $\theta_1[0] == \pi/2$ ,  $\theta_2[0] == 0$ ,  $\theta_1'[0] == 0$ ,  $\theta_2'[0] == 0$ };
```

```
opl =
  NDSolve[{ode1, ode2, begincond}, { $\theta_1$ ,  $\theta_2$ }, {t, 0, 20}, MaxSteps -> 10000];
```

```
Plot[Evaluate[ $\theta_1[t]$  /. First[opl]],
  {t, 0, 20}, PlotLabel -> "Shoulder angle";
```



```
Plot[Evaluate[ $\theta_2[t]$ ] /. Last[opl], {t, 0, 20}, PlotLabel -> "Elbow angle"];
```



Hierin zien we een onregelmatigheid van de slingerbeweging die karakteristiek is voor chaos.

Vraagstukken

Aanwijzingen voor het oplossen van vraagstukken..

Nothing beats thinking!

Voor het oplossen van natuurkundige vraagstukken bestaan geen vaste voorschriften. Toch is het verstandig een aantal regels te volgen:

Bezint eer gij begint:

Lees de vraagstelling zorgvuldig door. Probeer de natuurkunde van het probleem te begrijpen voordat je *Mathematica* erop los laat. Geef aan welke variabelen in het probleem gegeven zijn en welke gevraagd worden.

Probleemstelling:

Begin een uitwerking met een omschrijving van de probleemstelling in je eigen woorden en geef aan welke variabelen in het probleem gegeven zijn en welke gevraagd worden.

Teken figuur:

Teken voor jezelf een diagram om het probleem te verduidelijken.

Veronderstellingen:

Ga na wat de veronderstellingen zijn; wees niet bang zelf een veronderstelling te formuleren. Het is vaak mogelijk om een eerste schatting van de numerieke uitkomst te geven door vereenvoudigende veronderstellingen te maken.

Geef uitleg:

Geef in de uitwerking van een vraagstuk bij iedere stap steeds uitleg over wat je aan het doen bent en waarom. Je werk wordt daarop beoordeeld.

Dimensies:

Werk zoveel mogelijk met algebraïsche formules, met de numerieke constanten aangegeven door een symbool (h voor de constante van Planck, c voor de lichtsnelheid etc.). Dit heeft het voordeel dat de dimensies van de tussen-resultaten en het antwoord gecontroleerd kunnen worden.

Onderwerp alle belangrijke uitdrukkingen aan deze controle. Laat dit zien in de uitwerking.

Gebruik wat je weet:

Bekijk alle uitkomsten kritisch en vergelijk eventueel met een ander resultaat dat bekend is. Lijkt het antwoord plausibel? Schrijf je conclusie op.

Tenslotte, hou het ordelijk!

Bedenk dat je niet schrijft voor jezelf maar voor iemand anders.

1. Slinger ([AF] 10.6; note 10.3) [8pu]

Een slinger bestaat uit een gewicht opgehangen aan een draad in een zwaartekrachtsveld.

1.1 Laat zien dat de bewegingsvergelijking voor een slinger gegeven wordt door

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0$$

Hierin is θ de uitwijkingshoek en ω_0 de natuurlijke frequentie gegeven door

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

met g de zwaartekrachtversnelling en L de lengte van de slinger.

Teken een plaatje en benoem variabelen.

hint

Schrijf een uitdrukking op voor de energie in cartesische coördinaten en ga dan over op poolcoördinaten $x = L\sin\theta$, $y = L\cos\theta$. Bewerk dit, gegeven dat de energie constant is in de tijd, tot een vorm waaruit zich de bewegingsvergelijking laat aflezen.

Antwoord

1.2 Onder welke voorwaarde is de trilling van de slinger (vrijwel) harmonisch?

Antwoord

- 1.3 Kies de frequentie $\omega_0 = 1$ en los de differentiaalvergelijking van de slinger numeriek op voor beginvoorwaarden $\theta(0) = \frac{1}{3}$, $(\frac{d\theta}{dt})(0) = 0$. Teken met **Plot** een grafiek van de uitwijking als functie van de tijd. Maak ook een parametrische plot van de snelheid $\frac{\partial}{\partial t} \theta(t)$ tegen de uitwijking $\theta(t)$ voor deze oplossing van de differentiaalvergelijking.

hint

Volg bij opgave 1.3 t/m 1.7 de zelfde stappen als in het voorbeeld "Harmonische oscillator" dat hierboven staat uitgewerkt. Gebruik ook de informatie over de **Plot**, **ParametricPlot** en **PhasePlot** die in de sectie erboven wordt gegeven. Geef een duidelijke toelichting bij alle stappen!

Antwoord

- 1.4 Los nu de differentiaalvergelijking van de slinger numeriek op voor beginvoorwaarden $\theta(0) = 0$, $(\frac{d\theta}{dt})(0) = v$, met v achtereenvolgens gelijk aan 1.5, 2 en 2.05 en teken de grafieken (experimenteer met de tijdschaal). Zie je een kwalitatief verschil tussen de drie oplossingen? Wat voor beweging van de slinger hoort bij de drie begincondities?

Antwoord

- 1.5 Herschrijf de bewegingsvergelijking als een stelsel eerste-orde differentiaalvergelijkingen.

Antwoord

- 1.6 Construeer het faseportret voor de slinger en geef aan waar de knooppunten liggen. In de knooppunten staat de slinger stil. Beschrijf voor alle knooppunten, wat de beweging van de slinger wordt als we vervolgens de slinger een klein zetje geven.

Antwoord

- 1.7 Bespreek het kwalitatieve gedrag van de oplossing; maak onderscheid tussen drie typen van fasebanen. Hoe onderscheid de slinger zich van de harmonische slinger?

Antwoord

2. Gedempte trilling [8 pu]

Als een slinger een wrijvingskracht ondervindt zal de amplitude langzaam afnemen. Dit verschijnsel van demping kan beschreven worden door een wrijvingskracht die evenredig is met de snelheid $F = -\lambda v$.

- 2.1 Laat zien dat de bewegingsvergelijking voor een gedempte harmonische trilling de vorm

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

heeft met dempingsconstante $\beta = \frac{\lambda}{2m}$.

Antwoord

- 2.2 Laat zien dat de som van kinetische en potentiële energie van de gedempte trilling verandert volgens

$$\frac{dE}{dt} = -\lambda v^2.$$

Geef de fysische betekenis van deze vergelijking door haar in verband te brengen met de wrijvingskracht.

Antwoord

- 2.3 Los de vergelijking voor de gedempte harmonische trilling op met **DSolve**. Kies als beginvoorwaarden $x(0) = 1$, $\frac{dx}{dt}(0) = 0$ en neem $\omega_0 = 1$. Teken de oplossing voor $\beta = 0.25$; (onderdamping), $\beta = 1.0$; (kritische demping) en $\beta = 4.0$; (overdamping). Wat is het karakteristieke verschil tussen een *ondergedempte* en een *overgedempte* trilling?

Antwoord

- 2.4 Herschrijf de vergelijking voor de gedempte harmonische trilling als een stelsel van eerste-orde differentiaalvergelijkingen. Maak het faseportret voor $\omega_0 = 1$; en $\beta = 0.25$. Benoem het type knooppunt.

Antwoord

3. Schommel ([M] pagina 94) [6 pu]

Stel dat je op een schommel staat en stil hangt. Zonder dat iemand je helpt, bijvoorbeeld door je een zet te geven, en zonder dat je op een andere manier jezelf afzet, kun je toch vanuit stilstand in een slingerbeweging komen. Hoe kan dit?

Als natuurkundige proberen we het antwoord te geven in een aantal systematische stappen.

- 3.1** Bedenk wat voor bewegingen je met je lichaam uitvoert om de schommel aan het slingeren te brengen.

Antwoord

Nu maken we een vereenvoudigende veronderstelling, nl. dat de schommelaar alleen de knieën buigt en strekt. Daardoor gaat zijn zwaartepunt op en neer. Voor de rest van de opgave bestuderen we dit geval. Tevens veronderstellen we dat we de formule voor de slinger mogen gebruiken.

Stel nu dat de afstand van ophangpunt tot het zwaartepunt gelijk is aan:

l voor gestrekte knieën

$l + d$ voor gebogen knieën

en de uitwijking wordt beschreven met een hoek $\theta(t)$. Een sterk vereenvoudigd model om de schommel te beschrijven is:

```
Remove ["Global`*"]
schommel =  $\theta''[t] + \Omega[t] \theta[t] == 0$ 
```

$$\theta(t) \Omega(t) + \theta''(t) == 0$$

met $\Omega[t]$ gegeven door

$$\Omega[t] = g / \left(L + \frac{1}{2} d (1 + \cos[wt + \phi]) \right)$$

$$\frac{g}{L + \frac{1}{2} d (\cos(tw + \phi) + 1)}$$

- 3.2** Wat is de betekenis van de verschillende termen in deze uitdrukking voor Ω ?

Antwoord

- 3.3** Kies nu waarden voor w en ϕ , en begincondities voor $\theta(t)$ zodat blijkt onder welke condities de schommel steeds hoger gaat en hoe de schommel kan worden afgeremd.

Antwoord

- 3.4 Geef de potentiële energie als functie van de uitwijkingshoek θ voor het geval dat de schommel steeds hoger gaat en voor het geval dat hij afremt.
Teken voor een beter inzicht een plaatje.

Antwoord

Om uit te vinden waar de energie vandaan komt om de schommel in beweging te krijgen, vergelijken we het verlies en de winst van de arbeid, geleverd door de zwaartekracht, tijdens de verschillende fases van een enkele slingering.

- 3.5 Wat is het algemene verband tussen arbeid en energie? Geef een uitdrukking voor de verrichte arbeid tijdens het omhooggaan van de schommel; dus vanaf hoekuitwijking $\theta = 0$ tot en met de maximale hoekuitwijking $\theta = \theta_{\max}$? Wat is de gewonnen arbeid tijdens het dalen, $\theta = \theta_{\max}$ naar $\theta = 0$?

Antwoord

- 3.6 Wat kun je nu zeggen over het verschil tussen de kinetische energie die je verliest tijdens het stijgen en wint gedurende het dalen? Wat betekent dit voor de maximale hoekuitwijking?

Antwoord

Literatuur

- [AF] M. Alonso en E.J. Finn, *Physics*, Addison-Wesley Publishing Company, 1992.
[M] M. Minnaert, *De natuurkunde van 'tvrije veld 3*, B.V. W.J. Thieme & CIE-Zutphen, 1970.
[WV] J.P. van der Weele en T.P. Valkering, *Orde en chaos in de parametrisch aangedreven slinger*, in: Dynamische systemen en chaos, red: H.W. Broer en F. Verhulst, Epsilon Uitgaven, 1992.
[W] S. Wolfram, *Mathematica*, Cambridge University Press, 3rd edition, 1996.