

KLASSIEKE MECHANICA

Lagrange- en Hamiltonformalisme

Ch.G. van Weert
Instituut voor Theoretische Fysica
Valckenierstraat 65
1018 XE Amsterdam

COLLEGEJAAR 1994/1995

Inhoudsopgave

1	Kinematica	7
1.1	Ruimte	7
1.1.1	Puntdeeltje	7
1.1.2	Plaats	8
1.1.3	Rotatie	10
1.2	Beweging	12
1.2.1	Tijd	12
1.2.2	Baan	13
1.3	Eenheden	15
1.3.1	Système International	15
1.3.2	Natuurlijke Eenheden	16
2	Mechanica van Newton	19
2.1	De wetten van Newton	19
2.1.1	Traditionele formulering	19
2.1.2	Postulaten van Mach	20
2.1.3	Galilei-transformatie	21
2.2	Wisselwerking	23
2.2.1	Kracht	24
2.2.2	Potentiaal	26
2.2.3	Poisson-vergelijking	28
2.3	Behoudswetten	30
2.3.1	Impuls	30
2.3.2	Impulsmoment	33
2.3.3	Energie	35
2.3.4	Symmetrie-transformatie	40
3	Lagrange Formalisme	42
3.1	Vergelijkingen van Lagrange	42
3.1.1	Lagrangiaan	42
3.1.2	Lorentz-kracht	44
3.1.3	Gegeneraliseerde coördinaten	45
3.2	Principe van Hamilton	48
3.2.1	Aktieintegraal	48
3.2.2	Variatieprincipe	50

3.2.3	Euler-Lagrange Vergelijkingen	51
3.3	Behoudswetten	52
3.3.1	Behouden Grootheden	52
3.3.2	Tijdtranslatie	53
3.3.3	Ruimtetranslatie	55
3.3.4	Rotatie	56
3.3.5	Galilei-transformatie	57
3.3.6	Theorema van Noether	59
4	Hamilton Formalisme	63
4.1	Vergelijkingen van Hamilton	63
4.1.1	Hamiltoniaan	63
4.1.2	Legendre Transformatie	65
4.1.3	Kanonieke Vergelijkingen	65
4.1.4	Faseruimte	67
4.2	Poisson-haak	68
4.2.1	Definitie	68
4.2.2	Galilei-groep	70

Inleiding

Mechanica is de natuurwetenschap die zich bezighoudt met de beweging van fysische systemen in de ruimste zin: zon- en planetenstelsels, gasmassa's, hoepels, tollen, auto's, watergolven, atomen, kernen, etc.etc. De aanduiding "klassiek" wordt in de natuurkunde algemeen gebruikt om het tijdperk van vóór 1900 aan te duiden, d.w.z. de periode vóór de quantumtheorie (Planck, 1900) en relativiteitstheorie (Einstein, 1905). De klassieke mechanica (engels: *Classical Mechanics*) beperkt zich dus tot niet-quantummechanische en niet-relativistische problemen.

Gegrondvest door Galileo Galilei (1564-1642) en Isaac Newton (1642-1726) had de klassieke mechanica zich vanaf de 17^e eeuw ontwikkeld tot een theorie die met groot succes de beweging van hemellichamen kon voorspellen, maar ook toepasbaar was in de techniek en in het dagelijks leven. Tot het breekpunt in de ontwikkeling van de theoretische natuurkunde, aan het begin van deze eeuw werd klassieke mechanica de status van een universele theorie toegedicht. Met onze huidige kennis weten we echter wat de beperkingen van de klassieke mechanica zijn. Ten eerste moeten de snelheden verwaarloosbaar zijn t.o.v. de lichtsnelheid $c = 3 \times 10^8 \text{ms}^{-1}$. Ten tweede moeten "akties" groot zijn t.o.v. de quantum constante (gerationaliseerde Planck-constante) $\hbar = h/2\pi = 10^{-34} \text{Js}$. Het woord actie wordt hier gebruikt als aanduiding voor een willekeurige grootheid met dezelfde dimensie als $\hbar$, zoals impulsmoment.

Met behulp van de verhoudingen v/c en $\hbar/A$, waarin v een snelheid en A een actie karakteristiek voor een gegeven fysisch systeem zijn, kunnen we vier gebieden van de theoretische fysica onderscheiden:

	0	v/c	1
$\frac{\hbar}{A}$	Klassieke Mechanica	Relativiteits- Theorie	
	Quantum Mechanica	Quantum Veldentheorie	
			1

Het linker bovenkwadrant representeert de klassieke mechanica. De meest algemene theorie is op dit moment de quantumveldentheorie die een beschrijving biedt van de elementaire deeltjes en de fundamentele wisselwerkingen, maar ook veel wordt toegepast in de statistische fysica en de fysica van de gecondenseerde materie.

Daarbij moet wel de opmerking gemaakt worden dat quantumverschijnselen niet beperkt zijn tot de atomaire en sub-atomaire schaal. Voorbeelden van quantumgedrag op macroscopische schaal zijn supergeleiding en supervloeibaarheid, maar ook het bestaan van vaste stoffen vereist een quantum verklaring.

In dit college geven we een overzicht van de basisprincipes van de klassieke mechanica langs de lijn van de historische ontwikkeling, te beginnen met de wetten van Newton als voorbereiding op de formalismen van Lagrange en Hamilton. Het doel is een modern perspectief te geven met nadruk op het belang van symmetriebeschouwingen, en een goede basis te bieden voor de meer geavanceerde quantumtheorie. We volgen in grote lijn het boek van Marion en Thornton (zie literatuurlijst), waaraan we een aantal vraagstukken die op het werkcollege behandeld worden ontleenen. Het eerste hoofdstuk van dit boek bevat een samenvatting van de benodigde vectorrekening die we in dit diktaat verder bekend veronderstellen.

Literatuur

1. J.B. Marion en S.T. Thornton,
Classical Dynamics of Particles and Systems
third edition (Harcourt Brace Jovanovich, 1988)
2. L.D. Landau en E.M. Lifshitz,
Mechanics and Electrodynamics
A shorter course of theoretical physics, vol. I.
(Pergamon Press, 1972)
3. H. Goldstein,
Classical Mechanics
second edition (Addison-Wesley, 1980)
4. M.R. Spiegel,
Vector Analysis
(Schaum Outline Series, 1959)

Hoofdstuk 1

Kinematica

1.1 Ruimte

Niets bestaat behalve atomen en lege ruimte; al het andere is geloof.

Democritus van Abdera
ca. 460-370 v. C.

1.1.1 Puntdeeltje

De leer van de mechanica is gebaseerd op een aantal wetten die het mogelijk maken de beweging van stoffelijke lichamen te beschrijven in de taal van de wiskunde. De wetten van de mechanica vormen daarmee een mathematisch model. Eén van de belangrijkste begrippen in dit model is het begrip “massapunt” of “puntdeeltje” (ook stoffelijk punt of partikel geheten). Puntdeeltje is een zogeheten primitief begrip, d.w.z. een begrip dat niet in termen van andere begrippen wordt gedefinieerd, op dezelfde wijze als het begrip “punt” een primitief begrip is in de meetkunde.

Een puntdeeltje (engels: *point particle* of *ideal particle*) is een abstraktie van een klasse van bestaande mechanische voorwerpen met als prototypes: kogels en ballen. Deze voorwerpen hebben natuurlijk een afmeting, maar in vele gevallen zal dit geen rol spelen. Bijvoorbeeld de afmeting van de aarde t.o.v. de afstand tot de zon; de afmeting van een electron t.o.v. de afmetingen van een synchrotron; de afmeting van een vliegtuig als punt op een radarscherm etc. Als de afmetingen geen rol spelen is het een natuurlijke idealisatie om de ruimtelijke afmetingen te reduceren tot een punt.

In de klassieke mechanica wordt een materiëel fysisch systeem, zoals een gas, vloeistof, vaste stof, plasma, een ster, een melkwegstelsel etc., gedacht opgebouwd te zijn uit klassieke puntdeeltjes. Dit zijn dus geïdealiseerde objecten met een bepaalde massa die zodanig klein zijn dat hun afmetingen geen rol spelen in vergelijking met de karakteristieke lengte schaal van het systeem. Men kan zich zo’n puntdeeltje voorstellen als een atoom, maar meer in het algemeen bedoelt men hiermee een partikel materie, zonder waarneembare afmeting en structuur. Het feit dat fysische

puntdeeltjes geen punten zijn in mathematische zin, speelt geen rol omdat de klassieke fysica zich noodzakelijkerwijs moet beperken tot lengte schalen die groot zijn t.o.v. de atomaire schaal $\sim 1\text{\AA} = 10^{-10}\text{m}$.

1.1.2 Plaats

Aangezien een puntdeeltje bij definitie geen afmeting heeft kunnen we op ieder tijdstip aan het deeltje een unieke ruimtelijke positie toekennen. De ervaring heeft geleerd dat de ruimte zoals we die waarnemen 3D (= drie dimensionaal) is. Bovendien weten we dat, op en nabij de aarde, de meetkundige eigenschappen in goede benadering overeenstemmen met die van de Euclidische meetkunde. Weliswaar is volgens de algemene relativiteitstheorie ruimte gekromd in de buurt van een massief lichaam, maar de afwijkingen op aarde zijn zo klein dat ze nauwelijks waarneembaar zijn. De Euclidische ruimte $\mathbf{E}^3 = \mathbf{E}^1 \times \mathbf{E}^1 \times \mathbf{E}^1$ is dus de natuurlijke wiskundige omgeving voor de beschrijving van bewegingen van puntdeeltjes.

Aan ieder punt P in een 3D-Euclidische ruimte kunnen we drie getallen (x_1, x_2, x_3) toevoegen. Dit is een (bijjectieve) afbeelding op $\mathbb{R}^3$, een kaart of coördinatenstelsel genaamd; de drie getallen heten de coördinaten van P . Er zijn vele coördinatenstelsels denkbaar, maar bijzonder handig is de volgende constructie.

In een Euclidische ruimte is het afstandsbegrip gedefinieerd door de rechte die twee punten verbindt. Dit staat ons toe voor ieder punt P drie ruimtecoördinaten (x, y, z) te definiëren als de drie afstanden van P tot een rechthoekig assenkruis met een willekeurig gekozen oorsprong O . We zullen de drie richtingen van een dergelijk cartesisch assenstelsel aangeven met drie éénheidsvectoren $\{\mathbf{e}_i\}$, $i = x, y, z$. Als we ons nu verder beperken tot rechthoekige assenstelsels dan geldt dat het in-product van de richtingsvectoren voldoet aan de orthonormaliteitsrelatie

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \quad . \quad (1.1.1)$$

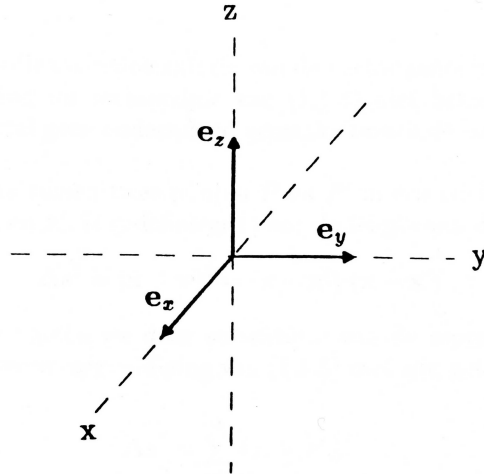
Het symbool δ_{ij} is de Kronecker-delta met de eigenschappen: $\delta_{ij} = 1$ als $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ als $i \neq j$.

Opgave 1 *Ga na dat (1.1.1) een rechthoekig assenstelsel definieert.*

Een 3D-Euclidische ruimte heeft de eigenschap van oriënteerbaarheid. Dit betekent dat alle geordende basisvectoren verdeeld kunnen worden in twee klassen: rechtshandig en linkshandig. Als één as wordt omgekeerd, of alle drie tegelijk, dan verandert de handigheid van een stelsel. We zullen kiezen voor een rechtshandig assenstelsel. Een wiskundige uitdrukking hiervoor is

$$\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j = \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_k \quad , \quad (1.1.2)$$

waarin ε_{ijk} het volledig antisymmetrische permutatie symbool is, meestal Levi-Cevita tensor genoemd (Tullio Levi-Civita, 1873-1941). Deze tensor heeft de componenten $\varepsilon_{ijk} = 1, -1$ als i, j, k een even, danwel oneven, permutatie van 1, 2, 3 vormen. Alle overige éénentwintig componenten zijn nul. Handigheid wordt ook wel chiraliteit



Figuur 1.1: Rechthoekig assenstelsel

genoemd, een term die bedacht is door Lord Kelvin (voorheen William Thomson, 1824-1907).

De positie van een willekeurig punt P tot de gekozen oorsprong O kunnen we nu aangeven met de positie-vector $\mathbf{x}$. Dit is een pijl getrokken vanuit O naar P . De basisrepresentatie voor deze vector is

$$\mathbf{x} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i \quad . \quad (1.1.3)$$

De drie coördinaten $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ van de vector vinden we door achtereenvolgende projectie op de drie assen:

$$x_i = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i \quad . \quad (1.1.4)$$

Opgave 2 *Teken in een 2D diagram de vector (1.1.3) en de projecties (1.1.4).*

Als de basisvectoren gegeven worden verondersteld, kunnen we de plaatsvector ook representeren door alleen de coördinaten op te geven. We noteren dit in de vorm van een kolom matrix

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad . \quad (1.1.5)$$

Dit wordt de coördinaat-representatie van de vector genoemd. Het is duidelijk dat de uitdrukking ter rechterzijde van (1.1.3) niet hetzelfde is als (1.1.5). Toch wordt meestal geen onderscheid gemaakt tussen de basis- en coördinaat-representatie.

De afstand Δs tussen twee punten P en P' in een euclidische ruimte met plaatsvectoren $\mathbf{x}$ en $\mathbf{x}'$, is gedefinieerd door de lengte van de vector $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$:

$$\Delta s^2 = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad . \quad (1.1.6)$$

De getalswaarde vinden we door substitutie van de representatie (1.1.2), of door een matrix-vermenigvuldiging van (1.1.5) met zijn getransponeerde $\mathbf{x}^T = (x_1, x_2, x_3)$:

$$\Delta s^2 = \sum_{i=1}^3 (x_i - x'_i)^2 \quad . \quad (1.1.7)$$

In het bijzonder wordt de afstand tot de oorsprong gegeven door

$$s = |\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \quad . \quad (1.1.8)$$

Opgave 3 *Controleer de laatste twee formules.*

1.1.3 Rotatie

Vervolgens bezien we hoe de coördinaatvector transformeert onder een draaiing van de coördinaatassen

$$\mathbf{e}_i' = \sum_{j=1}^3 R_{ij} \mathbf{e}_j \quad . \quad (1.1.9)$$

De nieuwe basisvectoren zijn een lineaire combinatie van de oude. De coëfficiënten R_{ij} vormen een 3×3 -rotatiematrix R . Onder rotatie moet de orthonormaliteitsconditie (1.1.1) behouden blijven:

$$\mathbf{e}_i' \cdot \mathbf{e}_j' = \delta_{ij} \quad . \quad (1.1.10)$$

Na invullen van (1.1.9) blijkt hieraan voldaan te zijn als geldt

$$\sum_{k=1}^3 R_{ik} R_{jk} = \delta_{ij} \quad . \quad (1.1.11)$$

In matrix-notatie schrijven we

$$RR^T = I \quad , \quad (1.1.12)$$

waarin I de eenheidsmatrix is. Met het symbool T wordt de getransponeerde matrix aangegeven

$$(R^T)_{ij} = R_{ji} \quad . \quad (1.1.13)$$

Uit vergelijking (1.1.12) leiden we af dat de inverse matrix wordt verkregen door transpositie:

$$R^{-1} = R^T \quad . \quad (1.1.14)$$

Matrices met deze eigenschap heten orthogonaal.

Opgave 4

(a) Laat zien dat $\det R = \pm 1$.

(b) Beredeneer dat het negatieve teken een verandering van handigheid betekent.

We bekijken alleen de zgn. eigenlijke rotaties met $\det R = 1$. De coördinaten op de nieuwe basis worden gegeven door

$$x_i' = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i' = \sum_{j=1}^3 R_{ij} x_j \quad , \quad (1.1.15)$$

of in matrix-notatie

$$\mathbf{x}' = R\mathbf{x} \quad . \quad (1.1.16)$$

Opgave 5 Controleer de gelijkheid

$$\sum_i x_i' \mathbf{e}_i' = \sum_i x_i \mathbf{e}_i \quad . \quad (1.1.17)$$

Het product van twee rotaties is ook een rotatie. Op grond hiervan benoemt men de verzameling van alle rotatietransformaties als een groep: de rotatiegroep. (Groep is de wiskundige benaming voor een verzameling elementen waarvoor het product van twee elementen weer een element van de verzameling is. Verder moet er een éénheidselement en een inverse gedefinieerd zijn.)

Een element van de rotatiegroep kan gespecificeerd worden door drie hoeken, of door een rotatierichting, zeg $\mathbf{n}$, en de draaiingshoek θ . Het aantal parameters van een groep wordt de dimensie genoemd. In het geval van de rotatiegroep is die dimensie dus drie.

Tot slot vermelden we dat we de transformatie (1.1.15) van de coördinaten, die het gevolg was van de draaiing van het assenstelsel, ook kunnen gebruiken om een draaiing van de vector zelf te definiëren t.o.v. het oorspronkelijke assenstelsel:

$$\mathbf{x}' = \sum_{j=1}^3 x_j' \mathbf{e}_j \quad .$$

Als het assenstelsel wordt gedraaid spreekt men van een *passieve* transformatie. Rotatie van de plaatsvector heet daarentegen een *aktieve* transformatie. Natuurkundig zijn passieve en actieve transformaties verschillende handelingen, maar voor de wiskunde maakt dit niet uit.

1.2 Beweging

1.2.1 Tijd

Absolute, true, and mathematical time, of itself, and from its own nature, flows equably, without relation to anything external, and by another name is called duration

Isaac Newton
1642-1727

Time is defined so that motion looks simple.

John Archibald Wheeler
1911-

Tijd is een intuïtief begrip waarvoor geen goede definitie te geven is. Van Dale definieert tijd als: “de voortgang en opeenvolging der gebeurtenissen en verschijnselen als een zelfstandige en ononderbroken eenheid beschouwd”. Dit is niet erg verhelderend. Voor natuurkundigen en sterrenkundigen is vooral belangrijk hoe tijd wordt gemeten. We komen hier nog op terug.

Wiskundig gezien geeft de tijd een 1D ordening van de toestanden van een fysisch systeem met twee orientaties: verleden en toekomst. Tijdintervallen worden gedefinieerd door de tijdcoördinaat te beschouwen als een punt in een 1D euclidische ruimte $\mathbf{E}^1$. Hieraan ontleen we dat het tijdinterval Δt tussen twee opeenvolgende gebeurtenissen op tijdstippen t en t' gegeven wordt door de positief-definite uitdrukking $\Delta t = |t - t'|$.

In het wereldbeeld van Galilei en Newton heeft tijd een absolute betekenis, d.w.z. een tijdinterval hangt niet van de keuze van het ruimtelijke assenstelsel. Anders gezegd, klokken lopen altijd even snel onafhankelijk van hun positie, of de snelheid en versnelling waaraan ze eventueel onderworpen zijn. We zullen later zien dat dit uitgangspunt verlaten moet worden in de relativiteitstheorie.

Hoewel we steeds goed moeten bedenken dat tijd en ruimte fysisch verschillende grootheden zijn, kunnen we op basis van hun meetkundige eigenschappen ruimte en tijd samenvoegen in een 4D ruimte $\mathbf{E}^1 \times \mathbf{E}^3$ die de (euclidische) ruimte-tijd wordt genoemd. De ruimte is homogeen en isotroop hetgeen wil zeggen dat de afstand tussen twee punten niet afhangt van hun positie of oriëntatie t.o.v. de oorsprong. Later zullen we zien dat de homogeniteit zal leiden tot de behoudswetten van energie en impuls voor een geïsoleerd lichaam, terwijl de isotropie van de 3D ruimte aanleiding zal geven tot de behoudswet van impulsmoment. Men noemt de invariantie van fysische theorieën onder translatie en rotaties in ruimte-tijd een symmetrie. Het verband tussen symmetrieën en behoudswetten staat bekend als het theorema van Noether dat later aan de orde zal komen.

In de moderne fysica worden de topologie en de metriek van ruimte en tijd niet als een gegeven inerte achtergrond voor de beschrijving van de dynamica beschouwd.

Integendeel, topologie en metriek vormen een onderdeel van de structuur van het heelal die men kan bestuderen en proberen waar te nemen. Men verwacht niet dat quantum verschijnselen een essentiële wijziging van het ruimte-tijd begrip noodzakelijk maken, tenzij het quantum fluctuaties betreft op de allerkleinste schaal van de Planck-lengte $(G\hbar/c^3)^{1/2} = 1.61605 \times 10^{-35}\text{m}$.

1.2.2 Baan

De mechanica heeft tot doel een exacte beschrijving te geven van de bewegingen van individuele deeltjes en deeltjessystemen. Om deze wetten te kunnen formuleren moeten we de begrippen momentane snelheid en versnelling invoeren. Deze begrippen lijken een vanzelfsprekende betekenis te hebben in het dagelijkse spraakgebruik, maar deze betekenis dekt niet in alle opzichten de wiskundige definities. Beroemd zijn de paradoxen van de griekse filosoof Zeno die dit illustreren. Het heeft tot de ontwikkeling van de calculus in de 17^e eeuw geduurd voordat aan momentane grootheden een sluitende wiskundige definitie gegeven kon worden.

We stellen ons voor dat we op ieder moment door meting de positie van een puntdeeltje in de reële 3D-ruimte t.o.v. een gegeven assenstelsel kunnen bepalen. Op deze wijze volgen we de baan

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{e}_x + y(t)\mathbf{e}_y + z(t)\mathbf{e}_z = \sum_{i=1}^3 x_i(t)\mathbf{e}_i \quad (1.2.1)$$

van het deeltje in de ruimte als functie van de parameter t die de tijd representeert. We nemen aan dat de drie functies $x_i(t)$, die de baan van een klassieke deeltje bepalen, continu en differentieerbaar zijn als functie van t . De snelheid is eveneens een vectorgrootheid gedefinieerd door

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \dot{\mathbf{r}}(t) \quad (1.2.2)$$

De tijdafgeleide van de vector $\mathbf{r}(t)$ is gedefinieerd als de limiet van de verschilvector tussen twee nabij-gelegen baanpunten, gedeeld door het tijdverschil:

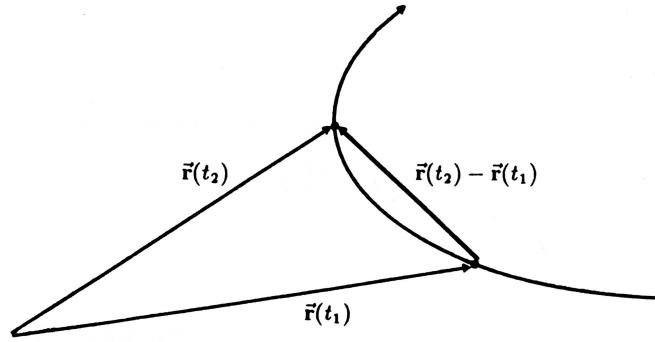
$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \quad (1.2.3)$$

De snelheid is een vector in de richting van de raaklijn aan de baan $\mathbf{r}(t)$.

Als $\mathbf{r}(t)$ gegeven is in de coördinaatvorm (1.2.1), met $x(t)$, $y(t)$ en $z(t)$ drie differentieerbare functies, dan vinden we

$$\mathbf{v}(t) = \dot{x}(t)\mathbf{e}_x + \dot{y}(t)\mathbf{e}_y + \dot{z}(t)\mathbf{e}_z = \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i(t)\mathbf{e}_i \quad (1.2.4)$$

We hebben hier gebruikt dat de basisvectoren van het assenstelsel niet veranderen in de tijd. We zien hier expliciet dat de snelheid als vector bepaald wordt door de tijdafgeleiden van de drie functies $x_i(t)$.



Figuur 1.2: Het verschil tussen de plaatsvectoren op twee tijdstippen.

De verandering van de snelheid is de versnelling

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2 \mathbf{r}(t)}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) \quad , \quad (1.2.5)$$

waarvoor we vinden

$$\mathbf{a}(t) = \ddot{x}(t)\mathbf{e}_x + \ddot{y}(t)\mathbf{e}_y + \ddot{z}(t)\mathbf{e}_z = \sum_{i=1}^3 \ddot{x}(t)\mathbf{e}_i \quad . \quad (1.2.6)$$

Als $\mathbf{a}(t)$ gegeven is verkrijgen we de snelheid en baan door integratie:

$$\mathbf{v}(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{a}(t)dt + \mathbf{v}_0 \quad , \quad (1.2.7)$$

$$\mathbf{r}(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{v}(t)dt + \mathbf{r}_0 \quad . \quad (1.2.8)$$

In mechanische problemen geven de bewegingsvergelijkingen gewoonlijk een uitdrukking voor $\mathbf{a}(t)$ in de vorm van een differentiaalvergelijking. Het vinden van een oplossing heet dan de integratie van de bewegingsvergelijkingen. De twee constanten $\mathbf{v}_0$ en $\mathbf{r}_0$ worden vastgelegd door de begincondities.

Opgave 6 *Gegeven een willekeurige differentieerbare kromme gedefinieerd door $\mathbf{A}(s)$ als functie van een parameter s .*

(a) *Stel dat $A = |\mathbf{A}(s)|$ constant is. Bewijs dat de vectoren $\mathbf{A}$ en $d\mathbf{A}/ds$ loodrecht op elkaar staan. Probeer dit ook meetkundig te begrijpen.*

(b) *Laat zien dat in het algemeen geldt*

$$\mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{ds} = A \frac{dA}{ds} \quad . \quad (1.2.9)$$

1.3 Eenheden

Weten door meten.

H. Kamerlingh Onnes
1853-1926

1.3.1 Système International

Hierboven hebben we vastgesteld dat het euclidische karakter van ruimte en tijd in principe de meting van tijd- en ruimteafstanden mogelijk maakt. Voor een experimentele wetenschap zoals de natuurkunde is dit niet genoeg. We moeten ons nu afvragen hoe de ruimte- en tijdintervallen gemeten worden, m.a.w. wat is de operationele definitie van tijd en afstand. Daarbij moeten we bedenken dat iedere meting van een fysisch verschijnsel altijd gebaseerd is op de gelijktijdige waarneming van twee gebeurtenissen. Bijvoorbeeld: de lengte van een lichaam wordt gemeten door het laten samenvallen van de uiteinden met de merktekens op een standaard lengteschaal; de tijd wordt afgelezen van een standaard klok.

In principe kan ieder stabiel periodiek verschijnsel als klokstandaard dienen. De oudste standaard is ongetwijfeld de opeenvolging van dagen, later verdeeld in uren, minuten en seconden. (De seconde was voor kort gedefinieerd als $1/86.400$ van een gemiddelde zonnedag.) Een zandloper of een mechanische of electrisch gedreven pendule kunnen ook als klok gebruikt worden. Het is echter gebleken dat atomaire electromagnetische verschijnselen veel nauwkeuriger tijdmetingen mogelijk maken.

- Daarom is de huidige SI (Système International) eenheid van tijd, de seconde, gedefinieerd als de duur van 9.192.631.770 lichttrillingen uitgezonden door het Caesium 133 atoom in de grondtoestand bij de overgang tussen twee hyperfijn niveau's.

Atoomklokken hebben een nauwkeurigheid van 1 op 10^{13} , d.w.z. de afwijking is minder dan één seconde in 3×10^5 jaar.

We maken hierbij de opmerking dat aardse atoomklokken onderhevig zijn aan algemeen-relativistische variaties van $1\mu\text{sec}$ per maand. De oorzaak is o.a. de maandelijkse schommeling van de aarde rond het zwaartepunt van het aarde-maan systeem. Deze variatie zou geëlimineerd kunnen worden door een galactische klok te gebruiken. Hiervoor komen milliseconde pulsars in aanmerking. Dit zijn neutronsterren die met ongeëvenaarde regelmaat pulsen uitzenden met een periode van $1 - 10\text{msec}$.

- De lengtestandaard, de SI meter, is een afgeleide van de tijdstandaard en de snelheid van het licht in vacuum. De definitie van deze meter, vastgesteld in 1983, fixeert de lichtsnelheid op de exacte waarde $c = 2,992.792.458 \times 10^8 \text{ms}^{-1}$, en legt daarmee de lengteschaal vast.

Het postulaat van Einstein dat de lichtsnelheid een vaste constante waarde heeft is hierdoor een vanzelfsprekendheid geworden. Wat vroeger een meting van de lichtsnelheid was, is nu geworden tot een vergelijking van de primaire tijdstandaard met een secundaire lengtestandaard.

Om later de wetten van Newton te kunnen formuleren moet nog een andere fundamentele grootte, met een dynamisch karakter, geïntroduceerd worden, namelijk massa. In de klassieke theorie is massa een additieve eigenschap, d.w.z. de massa van een samengesteld lichaam is de som van de massa's van de delen. Bovendien is massa onveranderlijk in de tijd. Massa is een maat voor de inertie van een deeltje, d.w.z. een maat voor de kracht nodig om een zekere verandering van de snelheid te bereiken. Deze eigenschap is intrinsiek, hetgeen wil zeggen dat de massa niet afgeleid kan worden uit de ruimte-tijd eigenschappen zoals plaats, snelheid en versnelling.

- In het metrieke stelsel is de eenheid van massa de kilogram.

Het standaardgewicht is een cylinder, gemaakt van een platina-iridium legering, die bewaard wordt in Parijs bij het Bureau International des Poids et Mesures. Massa wordt gemeten met een balans waarmee het gewicht van een onbekende massa wordt vergeleken met het gewicht van een standaard massa.

We moeten nog eens met nadruk stellen dat *massa* en *gewicht* twee geheel verschillende begrippen zijn. Het gewicht van een lichaam, gemeten in newton, is de *gravitatie*-kracht uitgeoefend op een lichaam. Dus gewicht is een extrinsieke eigenschap van een lichaam die een maat is voor de aantrekkingskracht; gewicht hangt af van de plaats van een lichaam in het zwaartekrachtsveld.

Verwarring tussen massa en gewicht ontstaat doordat massa wordt gemeten door vergelijking van gewichten. Doordat alle lichamen altijd *dezelfde* versnelling ondergaan (op aarde $g = 9.80\text{ms}^{-2}$) geldt $m_1/m_2 = w_1/w_2$. Het feit dat alle lichamen dezelfde valversnelling ondervinden in een zwaartekrachtsveld werd ontdekt door Galilei en staat bekend als het (zwakke) equivalentie principe. Het (sterke) equivalentie principe van Einstein, dat alle krachten en fysische verschijnselen omvat, is hiervan de generalisatie.

1.3.2 Natuurlijke Eenheden

In SI eenheden hebben een aantal belangrijke constanten de volgende waarden:

lichtsnelheid:

$$c = 2,997924580 \times 10^8 \text{ms}^{-1} \quad ;$$

gerationaliseerde constante van Planck:

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05457266 \times 10^{-34} \text{Js} \quad ;$$

constante van Boltzmann:

$$k_B = 1,380658 \times 10^{-23} \text{JK}^{-1} \quad ;$$

fijnstructuur constante (dimensieloos):

$$\alpha = \frac{e}{\hbar c} = 7,29735308 \times 10^{-3} \quad .$$

De constanten c , $\hbar$, k_B zijn drie onafhankelijke en fundamentele natuurconstanten die niet samenhangen met één van de vier natuurkrachten (zoals de gravitatieconstante G en de electronlading e); c en $\hbar$ zijn de fundamentele constanten van de relativistische quantumfysica, en k_B geeft het verband tussen mechanische en thermodynamische grootheden.

De keuze van een uniforme meetstandaard in de vorm van SI (Système International) eenheden is vooral van praktisch belang. Voor theoretische beschouwingen is het vaak bijzonder gemakkelijk om over te gaan op natuurlijke eenheden, gedefinieerd in termen van één basiseenheid waarvoor men de lengte-eenheid kan kiezen.

De afgeleide eenheden kiezen we zodanig dat de drie constanten c , $\hbar$, k_B , en ook de permeabiliteit van het vacuüm μ_0 , dimensieloos zijn met numerieke waarde één. Stel x_{SI} , t_{SI} , m_{SI} en T_{SI} zijn uitgedrukt in de eenheden meter (m), seconde (s), kilogram (kg) en kelvin (K). Deze grootheden geven we een dimensie die een bepaalde macht van $[L]$ is, door de volgende transformatie:

$$\begin{aligned} x^* &= x_{\text{SI}} & [L] \\ t^* &= ct_{\text{SI}} & [L] \\ m^* &= (c/\hbar)m_{\text{SI}} & [L]^{-1} \\ T^* &= (k_B/\hbar c)T_{\text{SI}} & [L]^{-1} \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

Men kan nagaan dat de dimensie de aangegeven macht van de lengte $[L]$ is. Andere grootheden transformeren we op dezelfde wijze b.v. energie en frequentie:

$$\begin{aligned} E^* &= (1/\hbar c)E_{\text{SI}} & [L]^{-1} \\ \omega^* &= (1/c)\omega_{\text{SI}} & [L]^{-1} \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

Hieruit vinden we de “natuurlijke” vergelijkingen

$$\begin{aligned} \omega_{\text{SI}} &= c(2\pi/\lambda_{\text{SI}}) \rightarrow \omega^* = 2\pi/\lambda \\ E_{\text{SI}} &= \hbar\omega_{\text{SI}} \rightarrow E^* = \omega^* \\ E_{\text{SI}} &= \frac{3}{2}k_B T_{\text{SI}} \rightarrow E^* = \frac{3}{2}T^* \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

die laten zien dat de waarde van de drie natuurconstanten in dit eenhedenstelsel is $c = \hbar = k_B = 1$.

- De vertaling van SI eenheden naar natuurlijke eenheden komt er dus eenvoudigweg op neer dat we alle drie de constanten de waarde één geven.

Het is belangrijk op te merken, dat ook in natuurlijke eenheden iedere term in een vergelijking een unieke dimensie heeft en dat termen links en rechts van het gelijkteken dezelfde dimensie hebben. Er is ook altijd de weg terug naar SI dimensies door omgekeerd te handelen.

Door een additionele natuurconstante te gebruiken kan een stelsel geconstrueerd worden waarin alle grootheden dimensieloos zijn. Planck nam in 1899 hiervoor de gravitatieconstante. Dit definieert o.a.

$$\begin{aligned}
 m_P &= (\hbar c/G)^{\frac{1}{2}} = 2.17671 \times 10^{-8} \text{ kg} \\
 l_P &= (G\hbar/c^3)^{\frac{1}{2}} = 1.61605 \times 10^{-35} \text{ m} \\
 t_P &= (G\hbar/c^5)^{\frac{1}{2}} = 5.39056 \times 10^{-44} \text{ s} \\
 E_P &= (\hbar c^5/G)^{\frac{1}{2}} = 1.95633 \times 10^9 \text{ J}
 \end{aligned} \tag{1.3.4}$$

zijnde respectievelijk de Planck-massa, -lengte, -tijd en -energie.

Hoofdstuk 2

Mechanica van Newton

2.1 De wetten van Newton

2.1.1 Traditionele formulering

De drie fundamentele wetten van de klassieke mechanica zijn neergelegd door Newton in zijn opus magnum *“Philosophia naturalis principia mathematica”*, kortweg bekend als de *“Principia”*, dat verscheen in 1687. De eerste wet is de traagheidswet:

I. *Een stoffelijk lichaam waarop geen kracht werkt volgt een éénparige beweging.*

Deze wet, die historisch aan Galilei en Descartes moet worden toegeschreven, vormt een duidelijke breuk met de tot dan overheersende natuurfilosofische traditie van Aristoteles. Daarin is de cirkelbeweging de natuurlijke toestand van hemelse lichamen en de vrije valbeweging die van aardse lichamen. In de nieuwe natuurwetenschap is de natuurlijke toestand van een stoffelijk lichaam een éénparige beweging, of de rusttoestand. Op de vraag wat een lichaam in beweging houdt geeft Newton het antwoord: niets.

De andere wetten van Newton zijn de beroemde tweede wet en de wet van de reactiekracht:

II. *Een kracht veroorzaakt een versnelling die gelijk is aan deze kracht gedeeld door de massa.*

III. *Als twee lichamen krachten op elkaar uitoefenen, dan zijn deze krachten gelijk in grootte en tegengesteld gericht.*

De wetten van Newton zijn algemene principes waaraan alle wisselwerkingen moeten voldoen. Zulke uitspraken kunnen nooit experimenteel bewezen worden, alleen gefalsificeerd. De wetten moeten daarom beschouwd worden als fundamentele postulaten die geldig blijven zolang als er geen conflict met het experiment wordt geconstateerd. Voor snelheden die klein zijn in vergelijking met de lichtsnelheid c , zijn alle experimenten die tot nu gedaan zijn met zeer grote nauwkeurigheid in overeenstemming met de wetten van de klassieke mechanica. De relativiteitstheorie

geeft de verklaring voor de afwijkingen van orde $(v/c)^2$ die waarneembaar worden als v niet meer klein is t.o.v. c .

We stellen vast dat beweging altijd gemeten wordt t.o.v. een zeker ruimtelijk coördinatenstelsel, terwijl we ook de beschikking moeten hebben over een klok. Zo'n combinatie van ruimte en tijdskartering noemt men een referentie-stelsel (engels: *reference frame*). De eerste wet definieert een speciale klasse van referentie-stelsels, nl. diegene waarin de traagheidswet geldig is. Dit worden inertiaalstelsels genoemd. Een assenstelsel vast verbonden aan de aarde is bij benadering zo'n stelsel. Bij nauwkeurige metingen blijkt echter dat er fictieve Coriolis-krachten optreden t.g.v. de draaiing van de aarde. Dit kunnen we ondervangen door een coördinaten-stelsel te kiezen dat gedefinieerd is door het zonnestelsel als geheel. In dit bijna exacte inertiaalstelsel is de waargenomen rotatie van de vaste sterren t.o.v. een willekeurige as door de zon minder dan 1 arcsec per eeuw. Er lijkt dus een convergentie naar een exact inertiaalstelsel op te treden bepaald door de structuur van het heelal. Deze hypothese wordt wel eens het principe van Mach genoemd, niet te verwarren met de postulaten van Mach die we hieronder bespreken.

2.1.2 Postulaten van Mach

De logische structuur van de wetten van Newton is in de loop der tijd onderwerp geweest van een uitgebreide discussie. De reden hiervoor is dat Newton geen duidelijke operationele definities van kracht en massa heeft geformuleerd. In de opzet van Mach (1838-1916) wordt dit bezwaar ondervangen door eerst het begrip trage massa te definiëren, en vervolgens via de tweede wet van Newton het begrip kracht. Deze formulering zullen we hieronder kort bespreken.

Stel we beschouwen de wisselwerking tussen twee deeltjes (1,2) in een inertiaalstelsel. Onder invloed van de krachten die ze op elkaar uitoefenen zullen ze een versnelling $\mathbf{a}_1$ en $\mathbf{a}_2$ ondervinden die we kunnen waarnemen. Het blijkt dan dat de twee versnellingen op ieder moment tegengesteld gericht zijn

$$\mathbf{a}_{12}(t) = -m_{21}\mathbf{a}_{21}(t) \quad . \quad (2.1.1)$$

De evenredigheidsfactor $m_{21} = 1/m_{12}$ is een constante, onafhankelijk van de plaats, tijd of snelheid van de deeltjes. Deze constante is dus een intrinsieke eigenschap, d.w.z. alleen afhankelijk van de aard van beide deeltjes. Het eerste postulaat van Mach verklaart deze waarneming tot een algemene wetmatigheid.

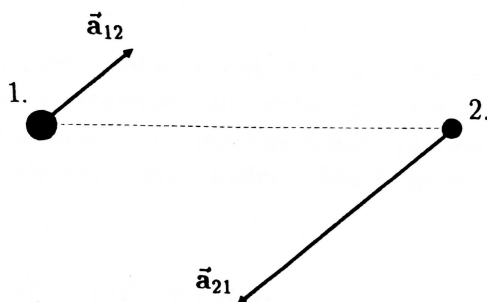
Op dezelfde wijze kunnen we constanten m_{13} en m_{23} definiëren voor deeltjesparen (1,3) en (2,3). Volgens het tweede postulaat van Mach geldt dan voor ieder drietal deeltjes

$$m_{12} m_{23} = m_{13} \quad . \quad (2.1.2)$$

We zien onmiddellijk dat hieraan voldaan is als we schrijven $m_{12} = m_1/m_2$. Daarmee wordt formule (2.1.1)

$$m_1\mathbf{a}_{12}(t) = -m_2\mathbf{a}_{21}(t) \quad . \quad (2.1.3)$$

Uit de gemeten versnellingen volgt dus de verhouding van de massa's. De massa's zelf leggen we vast door ze te betrekken op een vast standaard deeltje (bijvoorbeeld



Figuur 2.1: Versnellingen van twee puntdeeltjes in een inertiaalstelsel.

een proton of the standard kilogram). De eenheid van massa is hierbij willekeurig te kiezen. Hiermee is de massa gedefinieerd en een meetmethode gegeven onafhankelijk van weging met behulp van een balans.

Vervolgens definiëren we de kracht als in de tweede wet van Newton:

$$\mathbf{f}_{12} = m_1 \mathbf{a}_{12} \quad . \quad (2.1.4)$$

Dit is de kracht die deeltje 1 ondervindt t.g.v. deeltje 2. De richting van de kracht en de richting van de corresponderende versnelling is dus altijd gelijk. Met (2.1.3) krijgen we dan

$$\mathbf{f}_{12} = -\mathbf{f}_{21} \quad , \quad (2.1.5)$$

hetgeen de derde wet van Newton is: “actie” is minus “reactie”. De traagheidswet is een speciaal geval van de tweede wet, nl. als er geen kracht wordt uitgeoefend is de snelheid van een deeltje constant.

Het derde postulaat van Mach is het superpositie beginsel van Newton: de totale kracht uitgeoefend op deeltje 1 dat beïnvloed wordt door verschillende deeltjes $i = 2, 3, \dots$ is de vectoriële som van alle krachten die deeltje 1 van elk van de deeltjes i afzonderlijk zou ondervinden:

$$m_1 \mathbf{a}_1 = m_1 \sum_j \mathbf{a}_{1j} = \sum_j \mathbf{f}_{1j} \quad . \quad (2.1.6)$$

Experimenteel kan men verifiëren dat twee krachten in dezelfde richting inderdaad optellen en in tegengestelde richting aftrekken, en dat krachten die een hoek met elkaar maken op dezelfde wijze optellen als snelheden en versnellingen, m.a.w. als vectorgrootheden. Mach spreekt van de “wet van de parallellogrammen”.

2.1.3 Galilei-transformatie

De wetten van Newton worden geacht geldig te zijn in ieder inertiaalstelsel (IS). Daarvan zijn er altijd meerdere. Immers, vanuit een gegeven IS kunnen we onmiddellijk een oneindig aantal andere IS vinden: het is duidelijk dat de eerste wet

geldig blijft als we de coördinaat-assen over een vaste hoek verdraaien (rotatie), of de oorsprong over een vaste afstand verplaatsen (translatie). Bovendien is ieder coördinaten-stelsel, waarvan de oorsprong met een éénparige snelheid beweegt t.o.v. een gegeven inertiaalstelsel, zelf ook een inertiaalstelsel. Dit is het relativiteitsprincipe dat we later zullen bespreken.

Om de wiskundige vorm van de coördinatentransformatie tussen twee inertiaalstelsels IS en IS' te vinden, beschouwen we de algemene lineaire coördinatentransformatie

$$x'_i(t) = \sum_j R_{ij}(t)x_j(t) + d_i(t) \quad (2.1.7)$$

bestaande uit een draaiing en een verplaatsing. De transformatie moet lineair zijn opdat ook in IS' voldaan zij aan de traagheidswet

$$m\ddot{x}'_i(t) = 0 \quad . \quad (2.1.8)$$

We substitueren (2.1.7) in (2.1.8) en vinden zo de conditie

$$\sum_j \ddot{R}_{ij}x_j + 2 \sum_j \dot{R}_{ij}\dot{x}_j + \ddot{d}_i = 0 \quad . \quad (2.1.9)$$

Aangezien de coördinaten willekeurig zijn, moeten we kennelijk eisen

$$\dot{R}_{ij} = 0 \quad , \quad (2.1.10)$$

$$\ddot{d}_i = 0 \quad . \quad (2.1.11)$$

De rotatie moet constant zijn, maar verplaatsing met een eenparige snelheid is toegestaan:

$$d_i(t) = u_it + d_i \quad . \quad (2.1.12)$$

De transformatiewet tussen twee inertiaalstelsels heeft dus de vorm

$$x'_i = \sum_j R_{ij}x_j + u_it + d_i \quad (2.1.13)$$

waarin draaiingsmatrix, snelheid en verplaatsing constanten zijn. Een dergelijke transformatie heet een Galileitransformatie. Net als de rotaties vormen deze transformaties een groep: de Galileigroep.

In de klassieke mechanica wordt verondersteld dat de tijd onafhankelijk is van het coördinatenstelsel, dus $t' = t$. Het maakt echter niet uit of we een ander begintijdstip kiezen. We voegen daarom volledigheidshalve deze transformatieformule van de tijd toe:

$$t' = t + \tau \quad . \quad (2.1.14)$$

De Galileitransformatie hangt hiermee af van tien parameters: drie draaiingshoeken, de snelheid u_i , en de verplaatsingen d_i en τ .

Opgave 7 Geef de formule voor de inverse Galileitransformatie.

Het Relativiteitsprincipe zegt dat alle inertiaalstelsels equivalent zijn. Dit betekent dat fysische verschijnselen zich in alle IS op dezelfde wijze voordoen. Formeel zegt men dat de natuurwetten in alle IS dezelfde vorm hebben. Voor de traagheidswet is dit evident want daarmee hebben we nu juist het begrip IS gedefinieerd.

We controleren het Relativiteitsprincipe nu ook voor de tweede wet van Newton die we schrijven als

$$m\ddot{x}_i(t) = F_i(x, \dot{x}, t) \quad .$$

De kracht kan afhangen van de plaats en snelheid, en ook expliciet van de tijd. In het argument staat x voor de plaatscoördinaten $\{x_j\}$ en $\dot{x}$ voor de snelheidscoördinaten $\{\dot{x}_j\}$. Met (2.1.13) vinden we

$$m\ddot{x}'_i(t') = m \sum_j R_{ij} \ddot{x}_j(t) = \sum_j R_{ij} F_j(x, \dot{x}, t) \quad .$$

Kennelijk is het rechterlid de kracht zoals die zich voordoet in IS' :

$$F'_i(x', \dot{x}', t') = \sum_j R_{ij} F_j(x, \dot{x}, t) \quad .$$

Hierbij moeten we ons de variabelen $x_j, \dot{x}_j, t$ in het rechterlid vervangen denken door de corresponderende Galileitransformatie naar $x'_j, \dot{x}'_j$ en t' . In IS' is de tweede wet van Newton dus weer van de vorm kracht = massa $\times$ versnelling. We zien ook dat de kracht op dezelfde wijze transformeert als de plaatscoördinaat. M.a.w., de kracht is een vector. Het is echter belangrijk vast te stellen dat de twee krachten F_i en F'_i in het algemeen *verschillende* functies zullen zijn van hun argumenten. Men zegt dat de tweede wet covariant (d.w.z. vorminvariant) transformeert onder Galileitransformaties. Het Relativiteitsprincipe postuleert deze covariantie voor alle fundamentele natuurwetten.

Opgave 8

- (a) Geef de formule voor de transformatie naar een coördinatenstelsel waarvan de oorsprong een baan van constante versnelling volgt

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2} \mathbf{g} t^2 \quad . \quad (2.1.15)$$

- (b) Laat zien dat de traagheidswet niet covariant is onder deze transformatie.

2.2 Wisselwerking

And thus Nature will be very comfortable to herself and very simple, performing all the great Motions of the heavenly Bodies by the Attraction of Gravity which interceded those Bodies

Isaac Newton

2.2.1 Kracht

Door de wetten van Newton wordt ordening gebracht in de wirwar van bewegingen die men in de natuur kan waarnemen. Daarmee wordt het in beginsel mogelijk beweging wiskundig te beschrijven en te voorspellen. Men moet dan echter wel de vorm van de wisselwerking postuleren of empirisch kennen. Een voorbeeld van het laatste is de fenomenologische wet van Hooke die zegt dat de kracht opgewekt in een elastisch lichaam recht evenredig is met de lengte verandering

$$\mathbf{F}_{\text{Hooke}} = -k \Delta \mathbf{x} \quad . \quad (2.2.1)$$

De fenomenologische veerconstante k is karakteristiek voor de elasticiteit van het materiaal. De wet van Hooke is geen algemene natuurwet en slechts een goede benadering in het elastische regime, d.w.z. bij kleine uitwijkingen.

De natuurkundige Robert Hooke (1635-1703), die als curator en secretaris van de Royal Society een belangrijk tijdgenoot van Newton was, had zich ook gewaagd aan de speculatie dat de planeten in hun baan worden gehouden door een kracht die omgekeerd evenredig is met het kwadraat van de afstand. Na vanaf 1661 aan dit probleem gewerkt te hebben verhiel Newton in zijn *Principia* deze speculatie tot zijn universele zwaartekrachtswet. Deze wet postuleert dat ieder paar materiële lichamen, met massa's m en M , elkaar aantrekken met de kracht

$$\mathbf{F} = -G \frac{mM}{r^2} \mathbf{e}_r \quad . \quad (2.2.2)$$

Hierin is $G (= 6,67259 \times 10^{-11} \text{Nm}^2\text{kg}^{-2})$ de gravitatie constante en $r^2 = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2$ het kwadraat van de onderlinge afstand. De kracht is attractief en centraal, d.w.z. de kracht heeft de richting $\mathbf{e}_r$ van de verbindingslijn tussen de deeltjes.

In de gravitatietheorie van Newton is de zwaartekracht instantaan voelbaar op willekeurig grote afstanden. Men spreekt van instantane actie-op-afstand. Dit impliceert een oneindig grote voortplantingssnelheid, in tegenspraak met de relativiteitstheorie van Einstein. We moeten daarom de zwaartekrachtswet beschouwen als een benadering die geldig is bij lage snelheden ($v/c \ll 1$) en zwakke velden d.w.z. versnellingen ($ra/c^2 \ll 1$).

De zwaartekracht is universeel en werkt op alle vormen van massa. Verder is het onmogelijk om een systeem af te schermen van de gevolgen van de zwaartekracht. Omdat massa altijd positief is, betekent dit dat het effect van de zwaartekracht altijd toeneemt naarmate er meer massa is. Het gevolg is dat op grote (d.w.z. astronomische of kosmologische) schaal zwaartekracht gaat overheersen over alle andere vormen van interactie.

De stabiliteit van veel astrofysische systemen is een gevolg van de aantrekkende zwaartekracht. Zo wordt de sterevolutie beheerst door het evenwicht tussen de thermische druk die gegenereerd wordt door de kernprocessen in sterren zoals de zon en het samentrekkende effect van de zwaartekracht. Als geen kernprocessen meer mogelijk zijn zal een ster eindigen als een witte dwerg (voornamelijk bestaande uit elektronen en protonen) of een neutronenster (voornamelijk bestaande uit neutronen) of een zwart gat. De structuur van de eerstgenoemde compacte objecten berust

op het evenwicht tussen de zwaartekracht en de afstoting tussen de fermion deeltjes die het gevolg is van het Pauli principe. Een zwart gat kan ontstaan als de straal van een ster de corresponderende Schwarzschild-straal bereikt gegeven door $r_M = 2GM/c^2$, waarin M de totale massa van de ster is. Bij deze afmeting is de ontsnappingssnelheid aan het oppervlak van de ster gelijk aan de lichtsnelheid. Het bestaan van onzichtbare sterren werd al in 1784 door Michell, en in 1795 door Lagrange, als mogelijkheid geopperd. De term zwart gat (engels: *black hole*) is echter pas geïntroduceerd door Wheeler in 1968.

Eén van de bijzondere aspecten van de zwaartekracht is de evenredigheid met de massa, waardoor alle stoffelijke lichamen dezelfde zwaartekrachtversnelling

$$g = G \frac{M}{r^2} \quad (2.2.3)$$

ondervinden, zoals al waargenomen door Galilei. Hierin is M de massa van het aantrekkende object. Als er verschil zou zijn tussen de zware massa m_G zoals die voorkomt in de zwaartekrachtwet, en de trage massa m_I zoals die voorkomt in de tweede wet van Newton, dan zou (2.2.3) luiden:

$$g = G \frac{m_G}{m_I} \frac{M}{r^2} \quad (2.2.4)$$

Op grond van experimenten met pendules waaraan gewichten van verschillend materiaal hingen, concludeerde Newton tot de gelijkheid $m_G = m_I$. Zeer nauwkeurige experimenten werden gedaan door Eötvös in 1889. Latere metingen door Dicke, Roll en Krotkov in 1964 hebben de gelijkheid van zware en trage massa bevestigd met een nauwkeurigheid van 10^{-12} . Vrij vallende lichamen ondervinden exact dezelfde valversnelling onafhankelijk van hun massa, afmeting, of materiële samenstelling. Dit staat bekend als het zwakke equivalentie principe. De algemene relativiteitstheorie van Einstein is gebaseerd op een generalisatie van dit principe tot de equivalentie van versnelling en zwaartekracht in alle referentiestelsels.

Voor de verschijnselen beschreven door de klassieke mechanica is, naast de zwaartekracht, vooral ook de electromagnetische kracht van belang. Op een deeltje met elektrische lading e in een electrisch veld $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ en magnetisch veld $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ wordt een kracht uitgeoefend die gegeven wordt door de Lorentz formule

$$\mathbf{F} = e [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \dot{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] \quad (2.2.5)$$

De snelheid $\dot{\mathbf{r}}$ is klein verondersteld t.o.v. de lichtsnelheid. De velden $\mathbf{E}$ en $\mathbf{B}$ kunnen afkomstig zijn van een ander deeltje of van uitwendige bronnen zoals een condensator, een spoel, een antenne, of een pulsar ver in het heelal.

De electromagnetische wisselwerking is verantwoordelijk voor vrijwel alle materiële verschijningsvormen in de wereld om ons heen. De structuur van de atomen en moleculen wordt erdoor bepaald, en de manier waarop deze wisselwerking met straling en licht. Chemische eigenschappen en ander gedrag van gassen, vloeistoffen, vaste stoffen en plasmas zijn alle terug te voeren op electromagnetische interactie. Een volledige beschrijving vergt een discussie van de Maxwellvergelijkingen voor het

electromagnetische veld. Dit komt aan de orde in het college electrodynamica. Hier vermelden we slechts dat deze vergelijkingen als consequentie hebben dat het electromagnetische veld zich voortplant met een constante universele snelheid die een bovengrens is voor alle snelheden.

De zwaartekracht en de electromagnetische kracht zijn twee van de vier fundamentele natuurkrachten. De andere zijn de zwakke en de sterke kern-kracht. Door de kleine waarde van G , voor het eerst gemeten door Cavendish in 1797, is de gravitatiekracht verreweg de zwakste; zie tabel.

zwaarte kracht	zwakke kracht	electromagnetische kracht	sterke kracht
10^{-38}	10^{-13}	10^{-2}	1

Het ligt natuurlijk voor de hand te vragen waarom deze kracht zo zwak is, en wat de oorzaak van deze universele aantrekking is. Newton doet daarover geen uitspraak, en ook de moderne fysica heeft vooralsnog geen nieuw gezichtspunt opgeleverd. Er is nog geen verband gelegd met de andere krachten, hoewel men hoopt dat uiteindelijk een unificatie van alle krachten in één superkracht mogelijk zal zijn. Er bestaat al wel een geunificeerde theorie van de zwakke- en electromagnetische kracht die bekend staat als de Glashow-Salam-Weinberg theorie. De genoemden ontvingen in 1980 voor deze theorie de Nobelprijs.

Ook zijn er een aantal theorieën voorgesteld die een unificatie met de sterke kracht beögen (de zogemaande GUT's = Grand Unified Theories). Of dit programma om verder te komen tot een "super theorie" echter ook wat betreft de gravitatie uitgevoerd kan worden is op dit moment nog een open probleem.

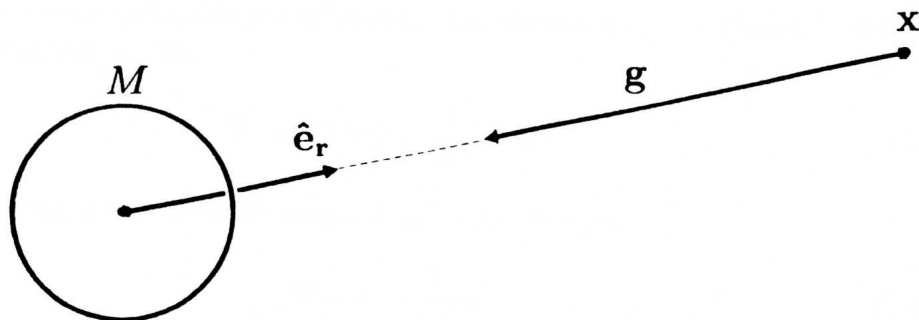
2.2.2 Potentiaal

De zwaartekrachtwet van Newton zegt dat twee deeltjes elkaar aantrekken met een kracht die omgekeerd evenredig is met de afstand. Stel nu dat een deeltje met massa M gelokaliseerd is in de oorsprong. De zwaartekrachtversnelling die een ander deeltje gelokaliseerd in het punt $\mathbf{x}$, met een willekeurige massa, zal ondervinden t.g.v. de aantrekking door M wordt gegeven door

$$\mathbf{g} = -G \frac{M}{r^2} \mathbf{e}_r \quad , \quad (2.2.6)$$

waarin $r = |\mathbf{x}|$ de afstand en $\mathbf{e}_r = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$ de normaal langs de verbindingslijn is. We merken nu op dat het rechterlid geschreven kan worden als de gradiënt van een skalaire funktie

$$\mathbf{g} = -\nabla\Phi \quad . \quad (2.2.7)$$



Figuur 2.2: Aantrekkende gravitatie kracht uitgeoefend door de massa M .

De gradiënt operator (ook wel “nabla” operator genoemd) is een vector operator die gedefinieerd is door

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} . \quad (2.2.8)$$

De componenten van deze vectoroperator zijn dus de partiële differentiaties naar de drie onafhankelijke coördinaten. De werking op de scalaire grootte $r = |\mathbf{x}|$ berekenen we als

$$\nabla r = \nabla |\mathbf{x}| = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} = \mathbf{e}_r . \quad (2.2.9)$$

Met behulp van deze formule kunnen we ook afleiden

$$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \mathbf{e}_r . \quad (2.2.10)$$

Dit laatste resultaat gebruiken we om de zwaartekrachtversnelling (2.2.6) te schrijven in de vorm (2.2.7) met de scalaire zwaartekracht-potentiaal gegeven door

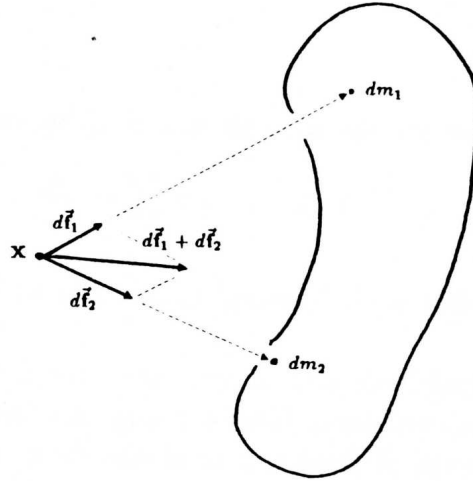
$$\Phi = -G \frac{M}{r} . \quad (2.2.11)$$

Merk op dat we hierbij een willekeurige constante kunnen optellen. De potentiaal is dus slechts bepaald tot op een additieve konstante. Het is echter gebruikelijk om op te leggen dat $\Phi \rightarrow 0$ als $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$. Uitdrukking (2.2.11) is hiermee in overeenstemming. Merk ook op dat de potentiële energie gegeven wordt door $m\Phi$; dus de potentiaal is de potentiële energie per massa-eenheid.

Opgave 9 Als de massa M zich niet in de oorsprong maar op de positie $\mathbf{r}$ bevindt wordt de zwaartekracht-potentiaal gegeven door

$$\Phi(\mathbf{x}) = -G \frac{M}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}|} .$$

Ga dit na.



Figuur 2.3: Optelwet van krachten.

Het bestaan van de potentiaalfunctie (2.2.11) bewijst dat de zwaartekracht conservatief is (zie §2.3.3). De Lorentz kracht (2.2.5) is een ander geval omdat deze ook afhangt van de snelheid. In het volgende hoofdstuk komen we hier op terug.

Opgave 10 *Construeer de potentiaalfunctie voor de elastische kracht (2.2.1).*

2.2.3 Poisson-vergelijking

We beschouwen nog eens de zwaartekrachtsversnelling (2.2.6). Stel nu dat een gegeven deeltje wordt aangetrokken door meerdere massa's $m_1, m_2, \dots$, die zich bevinden op de posities $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots$. Op grond van het superpositie beginsel mogen we de krachten uitgeoefend door deze deeltjes vectorieel optellen om het totale effect te berekenen:

$$\mathbf{g} = -G \sum_j m_j \frac{\mathbf{x} - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}_j|^3} \quad . \quad (2.2.12)$$

Ook deze uitdrukking kunnen we weer schrijven als de gradiënt van een zwaartekrachtpotentiaal. Deze zwaartekrachtpotentiaal is eenvoudig de som

$$\Phi(\mathbf{x}) = -G \sum_j \frac{m_j}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}_j|} \quad (2.2.13)$$

van de zwaartekracht potentialen van ieder van de deeltjes. Dus i.p.v. ieder van de drie componenten van de kracht apart op te tellen, kunnen we volstaan met één enkele optelling van skalaire potentiaal functies. Het is duidelijk dat dit een belangrijke vereenvoudiging is.

De Dirac δ -functie is gedefinieerd door de formule

$$\int dx f(x) \delta(x) = f(0) \quad , \quad (2.2.14)$$

waarin $f(x)$ een willekeurige functie is. Als f een functie van drie coördinaten x, y, z is kunnen we dit generaliseren tot

$$\int d^3x \delta^{(3)}(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) = f(0) \quad (2.2.15)$$

met $\delta^{(3)}(\mathbf{x}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$. Door gebruik te maken van deze definitie kunnen we voor de zwaartekrachtpotentiaal schrijven

$$\Phi(\mathbf{x}) = -G \int \frac{\rho(\mathbf{r})}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}|} d^3r \quad (2.2.16)$$

waarin de functie $\rho(\mathbf{r})$ is gedefinieerd door

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_j m_j \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \quad (2.2.17)$$

De fysische betekenis van deze functie wordt duidelijk door te integreren over een willekeurig volume V

$$\int_V \rho(\mathbf{r}) d^3x = M_V \quad (2.2.18)$$

We zien dat de uitkomst gelijk is aan de som van de massa's bevat in V

$$M_V = \sum_j m_j \quad , \quad \mathbf{r}_j \in V \quad (2.2.19)$$

De functie $\rho(\mathbf{r})$ met dimensie massa gedeeld door volume, wordt de massadichtheid genoemd.

Een stoffelijk lichaam met een zekere uitgebreidheid kunnen we ons opgebouwd denken uit een zeer groot aantal puntdeeltjes. De massadichtheid kunnen we dan benaderen als een continue functie $\rho(\mathbf{r})$ zodanig dat

$$\Delta M = \rho(\mathbf{r}) \Delta^3r \quad (2.2.20)$$

de massa geeft die bevat is in een klein volume $\Delta^3r = \Delta r_x \Delta r_y \Delta r_z$ ter plaatse $\mathbf{r}$. De totale massa in een willekeurig volume V wordt gegeven door de ruimteintegraal over V als in formule (2.2.18), en de resulterende zwaartekrachtpotentiaal door formule (2.2.16).

De zwaartekrachtpotentiaal heeft in ieder punt van de ruimte een zekere waarde. Men spreekt van een *potentiaalveld*. In 1782 werd door Laplace aangetoond dat, voor ruimtelijke gebieden waarin geen massa voorkomt, dit veld voldoet aan de vergelijking

$$\Delta \Phi(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.2.21)$$

met

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.2.22)$$

de Laplace operator. Deze vergelijking werd in 1813 door Poisson veralgemeeniseerd tot

$$\Delta \Phi(\mathbf{x}) = 4\pi G \rho(\mathbf{x}) \quad , \quad (2.2.23)$$

hetgeen inderdaad reduceert tot de vergelijking van Laplace (2.2.21) in gebieden waar $\rho(\mathbf{r}) = 0$. Dit is geheel analoog aan de Poisson vergelijking voor de electrostatische potentiaal.

Opgave 11

- (a) *Verifieer de Laplace vergelijking (2.2.21).*
- (b) *Bewijs nu de vergelijking van Poisson (2.2.23). Hierbij kan nuttig gebruik gemaakt worden van de formule*

$$\Delta \frac{1}{|\mathbf{x}|} = -4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{x}) \quad . \quad (2.2.24)$$

Hoe zou je deze identiteit kunnen afleiden?

2.3 Behoudswetten

2.3.1 Impuls

De drie wetten van Newton krijgen een diepere betekenis als we het verband onderzoeken met de behoudswetten die daarin zijn besloten. We spreken van een behoudswet als we een additieve fysische grootte kunnen vinden die constant blijft in de tijd. In de mechanica van Newton is de massa, die de traagheid van een deeltje karakteriseert, zo'n grootte. Additiviteit wil in dit geval zeggen dat de totale massa van een samengesteld lichaam de som is van de massa's van de delen.

We beschouwen nu de impuls die voor een puntdeeltje gedefinieerd is als het produkt van massa en snelheid

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \quad . \quad (2.3.1)$$

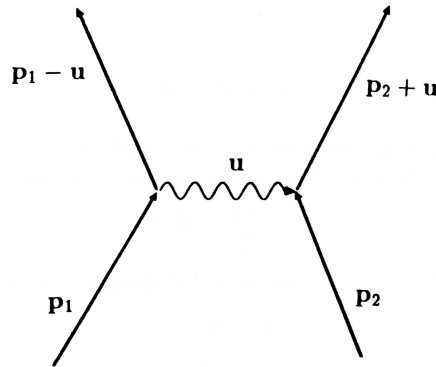
Voor één enkel deeltje in een inertiaalstelsel zonder uitwendige kracht zien we geen verandering van de impuls.

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0 \quad . \quad (2.3.2)$$

Dus de traagheidswet, tesamen met massabehoud, zegt dat de impuls een behouden grootte is.

Vervolgens bekijken we een systeem van twee deeltjes, die samen een geïsoleerd systeem vormen, maar op elkaar een kracht uitoefenen. Dit is dezelfde situatie als in het gedachte-experiment van Mach (zie §2.2.2). In het algemeen zal de impuls van de individuele deeltjes niet behouden zijn

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = -\frac{d\mathbf{p}_2}{dt} \neq 0 \quad , \quad (2.3.3)$$



Figuur 2.4: Wisselwerking is impulsoverdracht.

maar op grond van de derde wet van Newton mogen we concluderen dat de twee impulsveranderingen precies tegengesteld zijn. Dit betekent dat de som van de impulsen wel behouden is:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = 0 \quad . \quad (2.3.4)$$

We kunnen interactie dus zien als de overdracht van impuls. (We kunnen ons zelfs voorstellen dat deze impulsoverdracht wordt verzorgd door een krachtdragend intermediair deeltje karakteristiek voor de interactie. Dit echter terzijde.) In Opgave 12 wordt algemeen bewezen dat de totale impuls een additieve behouden grootheid is. Aangezien impuls een vectorgrootheid is zijn dit in feite drie behoudswetten voor de drie impulscomponenten.

Opgave 12 *Beschouw een systeem van wisselwerkende deeltjes $i = 1, 2, \dots$. Schrijf de bewegingsvergelijkingen als*

$$\frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \sum_{j \neq i} \mathbf{f}_{ij} \quad , \quad (2.3.5)$$

waarin $\mathbf{f}_{ij}$ de kracht op deeltje i is uitgeoefend door deeltje j .

- (a) *Op welke principes zijn deze vergelijkingen gebaseerd.*
- (b) *Bewijs dat op grond van de derde wet van Newton de totale impuls*

$$\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i \quad (2.3.6)$$

een behouden grootheid is.

In de mechanica van Newton is impulsbehoud een gevolg van de derde wet. Omgekeerd kunnen we de derde wet van Newton ook zien als een herformulering van de

wet van impulsbehoud. Dit verklaart de algemene geldigheid van de derde wet. Later zullen we zien dat impulsbehoud uitdrukking geeft aan het feit dat een geïsoleerd systeem invariant is voor ruimtelijke verplaatsingen. Dit is de eigenschap van homogeniteit van een Euclidische ruimte, en als zodanig een principe met algemene geldigheid dat uitgaat boven die van de Newtonse mechanica.

Vaak bepalen de fysische omstandigheden of we een gegeven systeem willen beschouwen als samengesteld of als één geheel. De additiviteit van massa en impuls laten toe dat we de massa en impuls van een systeem als geheel, dat bestaat uit delen met massa's m_i ter plaatse $\mathbf{r}_i$, berekenen door optelling:

$$M = \sum_i m_i \quad , \quad (2.3.7)$$

$$\mathbf{P} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \quad . \quad (2.3.8)$$

De corresponderende coördinaat van het systeem als geheel is het massapunt $\mathbf{R}$, ook zwaartepuntscoördinaat genoemd, gedefinieerd door

$$M\mathbf{R} = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \quad . \quad (2.3.9)$$

Differentiatie naar de tijd geeft het verband

$$M\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{P} \quad . \quad (2.3.10)$$

Dus het zwaartepunt van een geïsoleerd systeem beweegt met eenparige snelheid $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}}$, in overeenstemming met de traagheidswet.

Opgave 13

(a) *Laat zien dat de grootheid*

$$\mathbf{K} = M\mathbf{R} - \mathbf{P}t = \sum_i (m_i \mathbf{r}_i - \mathbf{p}_i t) \quad (2.3.11)$$

een additieve behouden grootheid is.

(b) *Kun je een betekenis aan deze grootheid geven?*

Meer in het algemeen heeft de bewegingsvergelijking voor het zwaartepunt dezelfde vorm als de bewegingsvergelijking voor een puntdeeltje. Dit is eenvoudig na te gaan door in het rechterlid van de bewegingsvergelijking (2.3.5) een externe kracht $\mathbf{F}_i$, afkomstig van buiten het systeem, werkend op deeltje i , op te nemen. Na sommatie over i vinden we dat de verandering van de totale impuls gegeven wordt door de totale kracht

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F} \quad , \quad \mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i \quad . \quad (2.3.12)$$

Dus het zwaartepunt beweegt alsof de totale externe kracht $\mathbf{F}$ zijn werking uitoefent op de totale massa M geconcentreerd in het massapunt $\mathbf{R}$.

De wet van behoud van impuls kunnen we dus als volgt formuleren:

- In afwezigheid van een uitwendige kracht is de totale impuls van een systeem behouden in de tijd.

Interne krachten hebben geen invloed op de beweging van het massapunt. Een bekend voorbeeld is de beweging van een exploderende granaat: het zwaartepunt van de fragmenten volgt een baan alsof de granaat nog één geheel vormt (luchtweerstand niet in aanmerking genomen).

Opgave 14 *Beschouw een lichaam, bijvoorbeeld een ster, beschreven door een continue massadichtheid $\rho(\mathbf{r})$. Geef definities voor:*

(a) *de totale massa;*

(b) *het massapunt.*

2.3.2 Impulsmoment

Het impulsmoment van een deeltje met impuls $\mathbf{p}$ t.o.v. een gegeven oorsprong is gedefinieerd als

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p} \quad , \quad (2.3.13)$$

waarin $\mathbf{r}$ de plaatsvector t.o.v. de oorsprong is. We benadrukken dat impulsmoment een relatief begrip is: als we een andere oorsprong kiezen verandert de waarde van $\mathbf{l}$. Merk ook op dat de volgorde belangrijk is vanwege de anticommutativiteit van het uit-produkt. Van het impulsmoment bepalen we de tijdafgeleide als

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{p} = 0 \quad . \quad (2.3.14)$$

Het uit-produkt geeft nul omdat de twee factoren parallel zijn. Het impulsmoment van een geïsoleerd deeltje is dus behouden als gevolg van impulsbehoud. Hieruit leren we niets nieuws over de beweging.

Stel we beschouwen een mechanisch systeem bestaande uit meerdere puntdeeltjes met massa's m_i en plaatsvectoren $\mathbf{r}_i$, $i = 1, 2, \dots$. We definiëren dan het totale impulsmoment van het systeem als de som van de impulsmomenten

$$\mathbf{J} = \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{p}_i \quad . \quad (2.3.15)$$

Opgave 15 *We beschouwen een translatie van de oorsprong over een gegeven afstand:*

$$\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{r}_i + \mathbf{d} \quad . \quad (2.3.16)$$

Hoe transformeert het totale impulsmoment (2.3.15)?

We gaan nu na of de additieve grootte $\mathbf{J}$ behouden is door een berekening van de tijdafgeleide

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_{i \neq j} \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{f}_{ij} + \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i \quad . \quad (2.3.17)$$



Figuur 2.5: Centrale (afstotende) kracht tussen een deeltjespaar

In het tweede lid maakten we gebruik van de bewegingsvergelijking (2.3.5) onder toevoeging van externe krachten $\mathbf{F}_i$ werkzaam op deeltjes i . De laatste term

$$\mathbf{N} = \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{F}_i \quad (2.3.18)$$

is het totale koppel, dat is de som van de momenten van de uitwendige krachten t.o.v. de oorsprong. De eerste term in het rechterlid van (2.3.17) herschrijven we met de derde wet van Newton

$$\frac{1}{2} \sum_{i \neq j} [\mathbf{r}_i \wedge \mathbf{f}_{ij} + \mathbf{r}_j \wedge \mathbf{f}_{ji}] = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \wedge \mathbf{f}_{ij} \quad (2.3.19)$$

De vector $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ is de verbindingsvector van $\mathbf{r}_j$ naar $\mathbf{r}_i$.

In het algemeen zal het rechterlid van (2.3.19) niet nul zijn. Als we ons echter beperken tot centrale krachten, dat zijn krachten die gericht zijn langs de verbindingslijnen van ieder paar wisselwerkende deeltjes, dan volgt

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \mathbf{N} \quad (2.3.20)$$

We kunnen hiermee de volgende behoudswet formuleren:

- In afwezigheid van een uitwendig koppel, en voor centrale krachten, is het totale impulsmoment een additieve behouden grootte.

Deze behoudswet kan worden opgenomen in de derde wet van Newton, door deze als volgt te lezen:

III'. *De onderlinge krachten tussen twee deeltjes zijn altijd gelijk en tegengesteld gericht, langs de lijn die de instantane posities van de twee deeltjes verbindt.*

Het totale impulsmoment laat zich op een natuurlijke wijze opdelen in een baan-impulsmoment en een spin-impulsmoment. Stel $\mathbf{d}_i$ is de positie vector van deeltje i t.o.v. de zwaartepuntsvector $\mathbf{R}$:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \mathbf{d}_i \quad . \quad (2.3.21)$$

Dan kunnen we schrijven

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S} \quad . \quad (2.3.22)$$

Het baanimpulsmoment is het impulsmoment van een puntdeeltje met massa $M = \sum_i m_i$ in $\mathbf{R}$:

$$\mathbf{L} = \mathbf{R} \wedge \mathbf{P} \quad . \quad (2.3.23)$$

Het spinimpulsmoment is de som van de impulsmomenten genomen t.o.v. het zwaartepunt

$$\mathbf{S} = \sum_i \mathbf{d}_i \wedge \mathbf{p}_i \quad . \quad (2.3.24)$$

De projectie

$$\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{p}} = \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{p}} \quad (2.3.25)$$

in de richting van $\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{P}/|\mathbf{P}|$ van de totale impuls wordt de *heliceiteit* genoemd.

In de quantummechanica is het impulsmoment gequantiseerd. Dat wil zeggen, het impulsmoment kan slechts discrete waarden hebben die heel- of half-oneven veelvouden zijn van het quantum van impulsmoment, zijnde de (gerationaliseerde) Planckse constante $\hbar = h/2\pi = 1.054 \times 10^{-34}$ Js. Omdat de waarde van deze constante zeer klein is speelt de quantisatie van het impulsmoment geen rol op macroscopisch niveau.

Opgave 16 *Beschouw de splitsing (2.3.22) van het totale impulsmoment in een baan en een spingedeelte.*

(a) *Wanneer is $\mathbf{J}$ onafhankelijk van de oorsprong?*

(b) *Bewijs*

$$\mathbf{S} = \sum_i m_i \mathbf{d}_i \wedge \dot{\mathbf{d}}_i \quad (2.3.26)$$

(c) *Wanneer is het spin-impulsmoment behouden?*

2.3.3 Energie

Stel een deeltje beweegt van een punt P_1 naar een punt P_2 onder invloed van een kracht $\mathbf{F}$. De arbeid die door $\mathbf{F}$ op het deeltje wordt verricht wordt gegeven door de lijn integraal

$$W_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^2 (F_x dr_x + F_y dr_y + F_z dr_z) \quad . \quad (2.3.27)$$

Deze integraal kunnen we verder berekenen als we de baan $\mathbf{r}(t)$ van het deeltje kennen. Dan volgt

$$W_{12} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} dt \quad , \quad (2.3.28)$$

en met de tweede wet van Newton

$$W_{12} = m \int_1^2 \ddot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} dt = \frac{1}{2} m \int_1^2 \frac{d}{dt} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) dt \quad . \quad (2.3.29)$$

Dit is te integreren tot

$$W_{12} = \frac{1}{2} m v^2 \Big|_{t_1}^{t_2} \quad . \quad (2.3.30)$$

De skalaire grootheid

$$T = \frac{1}{2} m v^2 \quad (2.3.31)$$

wordt de kinetische energie van het deeltje genoemd. Dus de arbeid die een uitwendige kracht verricht is gelijk aan de toe- of afname van de kinetische energie $W_{12} = T_2 - T_1$. Omgekeerd, is de kinetische energie een maat voor het vermogen van een deeltje om arbeid te verrichten op andere systemen.

Een kracht wordt *conservatief* genoemd als bij rondgang langs een willekeurige gesloten baan geen arbeid wordt verricht:

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad . \quad (2.3.32)$$

Het is duidelijk dat frictiekrachten of andere dissipatieve krachten nooit conservatief kunnen zijn. Immers frictie betekent energieverlies en dan kan de integraal (2.3.32) niet nul zijn. Een onmiddellijk gevolg is dat W_{12} in het geval van een conservatieve kracht niet afhangt van het integratiepad tussen P_1 en P_2 . We kunnen dus een skalaire funktie

$$U(P_2) = - \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (2.3.33)$$

definiëren die alleen afhangt van het gekozen eindpunt. Dus $U(P) = U(\mathbf{x})$ is een welgedefinieerde funktie van de plaats. Stel nu dat $\mathbf{r}(s)$ een willekeurig pad is dat de twee punten P_1 en P_2 verbindt: $P_1 = \mathbf{r}(s_1)$, $P_2 = \mathbf{r}(s_2)$. Dan volgt door differentiatie van (2.3.33):

$$\frac{dU}{ds} = -\mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} \quad . \quad (2.3.34)$$

Maar anderzijds is

$$\frac{dU}{ds} = \frac{dU}{dx} \frac{dr_x}{ds} + \frac{dU}{dy} \frac{dr_y}{ds} + \frac{dU}{dz} \frac{dr_z}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \nabla U \quad . \quad (2.3.35)$$

Aangezien de baan willekeurig gekozen mag worden concluderen we

$$\mathbf{F} = -\nabla U \quad . \quad (2.3.36)$$

Een conservatieve kracht kan dus altijd geschreven worden als de gradient van een scalaire funktie die de potentiaal wordt genoemd. Merk op dat we aan U altijd een willekeurige constante kunnen toevoegen; alleen potentiaalverschillen hebben fysische betekenis.

Voor een conservatieve kracht is de arbeid die verricht wordt tussen twee punten eenvoudig het verschil

$$W_{12} = -U \Big|_{t_1}^{t_2} = U(P_1) - U(P_2) \quad . \quad (2.3.37)$$

In combinatie met (2.3.30) verkrijgen we het resultaat

$$(T + U) \Big|_{t_1}^{t_2} = 0 \quad . \quad (2.3.38)$$

Dit is de wet van behoud van mechanische energie die zegt dat de som

$$E = T + U \quad (2.3.39)$$

van kinetische en potentiële energie behouden is. We spreken van potentiële energie omdat dit de hoeveelheid energie is die in principe omgezet kan worden in kinetische energie.

Opgave 17 *Beschouw een conservatief krachtsveld (2.3.36).*

- (a) *Laat zien dat de arbeid W_{12} onafhankelijk is van het pad.*
- (b) *Bewijs dat een kracht conservatief is dan en slechts dan als voldaan is aan de conditie*

$$\nabla \wedge \mathbf{F} = 0 \quad (2.3.40)$$

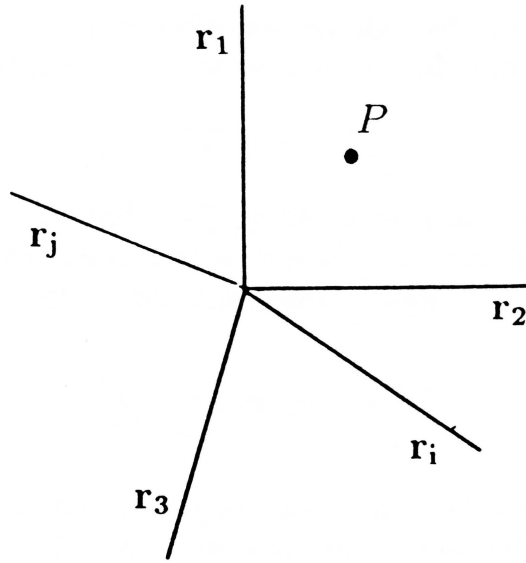
die zegt dat de rotatie van $\mathbf{F}$ overal nul is.

Opgave 18 *Beschouw een potentiaalfunktie $U(\mathbf{x}, t)$ die expliciet afhangt van de tijd. Laat zien dat geldt:*

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} \quad (2.3.41)$$

langs de baan van een deeltje.

De bovenstaande beschouwingen laten zich generaliseren tot een systeem van meerdere deeltjes $i = 1, 2, \dots$. I.p.v. één enkele positie beschouwen we nu een configuratie $P = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots)$, dat is de verzameling van de posities die de verschillende deeltjes van het beschouwde systeem op een bepaald moment innemen. We kunnen ons een configuratie voorstellen als een punt P in de configuratieruimte. Dit is een denkbeeldige veel-dimensionale euclidische ruimte opgespannen door de coördinaatvectoren $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots$ van de deeltjes.



Figuur 2.6: Configuratuieruimte van een veeldeeltjes-systeem.

Stel het systeem ontwikkelt zich in de tijd van een configuratie P_1 naar een configuratie P_2 . De arbeid die verricht wordt door de krachten verkrijgen we door voor ieder deeltje de netto kracht te integreren langs de corresponderende baan:

$$W_{12} = \sum_i \int_1^2 \left(\sum_{j \neq i} \mathbf{f}_{ij} + \mathbf{F}_i \right) \cdot d\mathbf{r}_i \quad . \quad (2.3.42)$$

De eerste term geeft de bijdrage van de inwendige krachten en de tweede die van de uitwendige kracht. Met de bewegingsvergelijkingen wordt dit

$$W_{12} = \sum_i \int_1^2 \dot{\mathbf{p}}_i \cdot d\mathbf{r}_i = \sum_i \int_1^2 d \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \quad . \quad (2.3.43)$$

Dus de verrichte arbeid is weer te schrijven als een verschil

$$W_{12} = T_2 - T_1 \quad , \quad (2.3.44)$$

waarin nu de grootheid T staat voor de totale kinetische energie

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad (2.3.45)$$

van het systeem.

Opgave 19 De kinetische energie (2.3.41) kan geschreven worden als de som

$$T = \frac{1}{2}MV^2 + \sum_i \frac{1}{2}m_i \dot{d}_i^2 \quad (2.3.46)$$

van kinetische energieën van de zwaartepunts- en de relatieve beweging. Ga dit na.

In het geval dat de uitwendige kracht afgeleid kan worden van een potentiaalfunctie $U(\mathbf{x})$, kunnen we voor de resulterende kracht op deeltje i schrijven

$$\mathbf{F}_i = -\nabla_i U_i \quad , \quad (2.3.47)$$

waarin $U_i = U(\mathbf{r}_i)$; de index bij de nabla operator betekent dat de afgeleide wordt genomen naar de componenten van de plaatsvector $\mathbf{r}_i$. De uitwendige arbeidsterm in (2.3.69) wordt dus gegeven door

$$\sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i = - \sum_i U_i \Big|_{t_1}^{t_2} \quad , \quad (2.3.48)$$

d.w.z. de som van potentiaalverschillen voor ieder van de deeltjes.

Vervolgens veronderstellen we dat ook de inwendige krachten conservatief zijn. Dit betekent dat ook de onderlinge krachten verkregen kunnen worden uit een gegeven potentiaalfunctie V . Om aan de wet van actie en reactie te voldoen mag deze potentiaal slechts afhangen van de afstand:

$$V_{ij} = V(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) = V_{ji} \quad . \quad (2.3.49)$$

De twee krachten op deeltjes i en j zijn dan automatisch gelijk en tegengesteld

$$\mathbf{f}_{ij} = -\nabla_i V_{ij} = \nabla_j V_{ij} = -\mathbf{f}_{ji} \quad , \quad (2.3.50)$$

en gericht langs de onderlinge verbindslijn

$$\nabla_i V_{ij} = \frac{dV(r_{ij})}{dr_{ij}} \nabla_i r_{ij} = \frac{dV}{dr} \frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}} \quad , \quad (2.3.51)$$

met $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j = \mathbf{r}_{ij}$.

De berekening van de inwendige arbeidsterm in formule (2.3.42) verloopt nu als volgt:

$$\begin{aligned} \sum_{i \neq j} \int_1^2 d\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{f}_{ij} &= - \sum_{i \neq j} \int_1^2 d\mathbf{r}_i \cdot \nabla_i V_{ij} \\ &= - \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \int_1^2 d(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \cdot \nabla_i V_{ij} \quad . \end{aligned} \quad (2.3.52)$$

Om de laatste term te verkrijgen hebben we de dummy indices (= indices waarover gesommeerd wordt) verwisseld en vervolgens gebruik gemaakt van (2.3.49) en (2.3.50). We merken nu op dat voor een functie $V(r)$ geldt:

$$dV = \frac{dV}{dr} dr = \frac{dV}{dr} d\mathbf{r} \cdot \nabla r = d\mathbf{r} \cdot \nabla V \quad . \quad (2.3.53)$$

De te berekenen arbeidsterm wordt dus

$$\sum_{i \neq j} \int_1^2 d\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{f}_{ij} = -V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots) \Big|_{t_1}^{t_2}, \quad (2.3.54)$$

waarin de potentiële energie van het systeem

$$V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots) = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) \quad (2.3.55)$$

een som van potentiaalfuncties is over alle paren deeltjes.

De resultaten (2.3.44), (2.3.48) en (2.3.54) kunnen we nu als volgt samenvatten:

- Voor een systeem met conservatieve krachten is de totale mechanische energie

$$E = T + V + U \quad (2.3.56)$$

behouden in de tijd.

Dit belangrijke resultaat werd voor het eerst afgeleid door Lagrange in 1780 voor het geval van Newtonse gravitatie.

We merken nog op dat energie geen additieve grootte is in strikte zin. Weliswaar tellen de kinetische energieën op maar de potentiële energie wordt gedragen door paren deeltjes, en is daardoor niet lokaliseerbaar in een bepaald punt. Lokalisatie is wel mogelijk als we de interactie beschrijven als een veld met eigen vrijheidsgraden zoals dat gebruikelijk is in de quantumveldentheorie.

Mechanische energie is een zeer belangrijke karakteristieke grootte voor een conservatief systeem. Vaak zijn energiebeschouwingen voldoende voor een kwalitatieve beschrijving van de beweging van een systeem, zonder de oplossing van de bewegingsvergelijkingen te kennen. Het feit dat energie een scalaire grootte is, is daarbij een belangrijk gegeven.

In het geval van een niet-conservatieve kracht is mechanische energie niet behouden. Door het energiebegrip echter te verbreden, en b.v. warmte ook als een vorm van energie te beschouwen, kan een algemener principe van energiebehoud geformuleerd worden. Zo werd in het midden van de 19^e eeuw energiebehoud uitgebreid tot de eerste wet van de thermodynamica. Thans is energiebehoud een van de centrale principes van de gehele fysica.

2.3.4 Symmetrie-transformatie

De meest algemene Galilei-transformatie tussen twee inertiaalstelsels heeft de vorm (2.1.13). De transformatie bestaat uit een rotatie R van het assenstelsel, een verplaatsing over een vaste afstand $\mathbf{d}$, en met eenparige snelheid $\mathbf{u}$. De transformatie geeft het verband tussen de coördinaten die betrekking hebben op dezelfde gebeurtenis in twee verschillende inertiaalstelsels.

We kunnen de transformatie echter ook actief toepassen, als een transformatie op de baan van ieder deeltje

$$\mathbf{r}'_i(t) = R \mathbf{r}_i(t) + \mathbf{u}t + \mathbf{d} \quad . \quad (2.3.57)$$

De functies $\{\mathbf{r}'_i(t)\}$ beschrijven een nieuwe baan in de configuratieruimte verkregen door rotatie en verplaatsing van het oorspronkelijke systeem. Als nu ook de nieuwe baan een oplossing blijkt te zijn van de oorspronkelijke bewegingsvergelijkingen

$$\frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \sum_j \mathbf{f}_{ij} \quad , \quad (2.3.58)$$

dan spreken we van een symmetrietransformatie. De fysische verschijnselen hebben dan precies hetzelfde verloop als voor het oorspronkelijke systeem.

We bekijken het geval dat de kracht zich laat schrijven als de gradient van paarpotentialen $V(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)$, zoals in §2.3.3. Aangezien de onderlinge afstand niet verandert onder de transformatie (2.3.57) is ook de potentiaal invariant. De wisselwerking in het oorspronkelijke en het getransformeerde systeem hebben dezelfde vorm en de bewegingsvergelijkingen zijn invariant onder de Galilei-transformatie (2.3.57). In het onderhavige geval is dit een symmetrietransformatie: de baan beschreven door $\{\mathbf{r}'_i(t)\}$ ligt ook in de oplossruimte van de vergelijkingen (2.3.58), maar correspondeert met andere begincondities. In het volgende hoofdstuk zullen we zien dat er een direct verband is tussen invariantie van de bewegingsvergelijkingen en de behoudswetten.

Opgave 20 *Controleer de invariantie $V' = V$ van de potentiaal onder de transformatie (2.3.57).*

De invariantie van de bewegingsvergelijkingen geldt voor een geïsoleerd systeem. Als voorbeeld nemen we het zonnestelsel. Ook verplaatst over een afstand van vele lichtjaren zal dit er precies hetzelfde uitzien, mits de begincondities dezelfde zijn, en externe krachten verwaarloosbaar. Als er een uitwendige kracht werkzaam is, zal het systeem zich i.h.a. anders gedragen na draaiing of verplaatsing. De bewegingsvergelijkingen zijn dan slechts covariant en niet invariant. Bijvoorbeeld, het biljartspel wordt gespeeld op een biljarttafel die waterpas is gesteld. Als we de tafel enigszins kiepen vallen de ballen van het biljart, en zijn de spelregels zinloos geworden. Vanwege de uitwendige zwaartekracht is het systeem slechts invariant onder draaiingen rond de verticale as, en niet onder willekeurige draaiingen. Rotatiesymmetrie is gebroken door de uitwendige zwaartekracht. Als de kracht afhankelijk is van de positie is het systeem ook niet langer invariant onder verplaatsingen.

Hoofdstuk 3

Lagrange Formalisme

Ces loix si belles et si simples font peut-être les seules que le Créateur et l'Ordonnateur des choses a établies dans la matière pour y opérer tous les phénomènes de ce Monde visible.

Pierre Louis Moreau de Maupertius
1698-1759

3.1 Vergelijkingen van Lagrange

3.1.1 Lagrangiaan

Het energiebegrip vormt de basis voor de andere formuleringen van de mechanica die we hieronder bespreken en waaraan de namen van Jean Louis Lagrange (1736-1813) en Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) zijn verbonden. Het Lagrange-formalisme geeft een elegante formulering van de bewegingsvergelijkingen die de behandeling van bepaalde mechanische problemen aanzienlijk vereenvoudigt. Dit betreft i.h.b. problemen waarbij restricties aan de beweging worden opgelegd.

We beginnen met het eenvoudige geval van één enkel deeltje dat beweegt in een potentiaal veld $V(\mathbf{r})$, afhankelijk van de plaats, dat we verder niet specificeren. De bewegingsvergelijking is

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} \quad , \quad (3.1.1)$$

$$\mathbf{F} = -\nabla V \quad . \quad (3.1.2)$$

Door gebruik te maken van de definitie

$$T(\dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 \quad (3.1.3)$$

voor de kinetische energie, kunnen we de bewegingvergelijking herschrijven tot

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \right) = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} \quad . \quad (3.1.4)$$

Hierbij hebben we een nieuwe notatie $\nabla = \partial/\partial\mathbf{r}$ voor de gradient operator ingevoerd met de afspraak dat bij differentiatie naar $\mathbf{r}$ eventuele andere variabelen constant gehouden worden. Dezelfde afspraak is ook van toepassing op de partiële differentiatie naar $\dot{\mathbf{r}}$.

De kinetische energie T hangt niet af van $\mathbf{r}$, en anderzijds, is de potentiaal V onafhankelijk van $\dot{\mathbf{r}}$. We kunnen voor vergelijking (3.1.4) dus ook schrijven

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial(T - V)}{\partial\dot{\mathbf{r}}} = \frac{\partial(T - V)}{\partial\mathbf{r}} \quad . \quad (3.1.5)$$

We zien hierin aan beide zijden het verschil

$$L = L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = T(\dot{\mathbf{r}}) - V(\mathbf{r}) \quad (3.1.6)$$

van kinetische- en potentiële-energie verschijnen. Dit is de Lagrange funktie L , meestal Lagrangiaan genoemd. Als de Lagrangiaan van een systeem bekend is door specificatie van $V(\mathbf{r})$ dan volgen daarmee ook de bewegingsvergelijkingen als

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\mathbf{r}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial\mathbf{r}} = 0 \quad . \quad (3.1.7)$$

Dit zijn de vergelijkingen van Lagrange door hem afgeleid in 1788. Zij bevatten de skalare Lagrangiaan (3.1.6) die een funktie is van plaats en snelheid. Als deze bekend is kan door integratie van (3.1.7) de beweging gevonden worden.

Opgave 21 *Controleer expliciet de equivalentie van vergelijkingen (3.1.1) en (3.1.7) door uitschrijven in vectorcomponenten. Geef de componenten van de vector-operatoren $\partial/\partial\mathbf{r}$ en $\partial/\partial\dot{\mathbf{r}}$.*

De afleiding van de vergelijkingen van Lagrange voor een systeem van meerdere deeltjes bestaat eenvoudig uit een herhaling van de stappen (3.1.1) tot en met (3.1.7), mits we mogen aannemen dat het systeem conservatief is. In dat geval bestaat er een potentiaalfunctie $V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, t)$, die een funktie is van de deeltjescoördinaten, en die eventueel ook kan afhangen van de tijd, zodanig dat de totale kracht op deeltje i gegeven wordt door

$$\mathbf{f}_i = -\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}_i} V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, t) \quad . \quad (3.1.8)$$

Invoeren van de Lagrangiaan

$$L = T(\dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, \dots) - V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, t) \quad , \quad (3.1.9)$$

met T de som van kinetische energieën van de deeltjes, leidt dan tot de set van Lagrange vergelijkingen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial\dot{\mathbf{r}}_i} - \frac{\partial L}{\partial\mathbf{r}_i} = 0 \quad (3.1.10)$$

die voor ieder van de deeltjes dezelfde vorm hebben. Dus ook voor een systeem van meerdere identieke deeltjes wordt de dynamica van het systeem volledig bepaald door één enkele skalare funktie L die het verschil is van de universele kinetische energie T en de voor het systeem specifieke potentiaalfunctie V .

Opgave 22

- (a) Geef de Lagrangiaan voor een systeem van twee deeltjes met onderlinge potentiaal $V(r)$ waarbij $r = |\mathbf{r}| = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ de onderlinge afstand is.
- (b) Ga over op de zwaartepuntscoördinaat $\mathbf{R}$ en relatieve coördinaat $\mathbf{r}$. Bepaal de vorm van de Lagrangiaan in het zwaartepuntssysteem $\dot{\mathbf{R}} = 0$.

3.1.2 Lorentz-kracht

In het bovenstaande hebben we ons beperkt tot een potentiaalfunctie die slechts afhangt van de plaats. Als voorbeeld kan men denken aan de zwaartekrachtspotentiaal. Zoals men eenvoudig kan nagaan, gaat de gegeven afleiding van de Lagrange vergelijkingen echter onveranderd door als we nu krachten beschouwen die afgeleid kunnen worden uit een snelheids- en tijdafhankelijke potentiaal $V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ volgens het voorschrift

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} + \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{\mathbf{r}}} . \quad (3.1.11)$$

Immers, door herschikking van de termen in (3.1.5) leiden we de volgende formule af

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} + \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \quad (3.1.12)$$

waarbij we weer gebruikt hebben dat T niet afhangt van $\mathbf{r}$. Dus als de kracht van de vorm (3.1.11) is, laten zich de bewegingsvergelijkingen inderdaad herleiden tot de Lagrange-vorm (3.1.7).

Dat dit geen akademisch geval is, blijkt wanneer we de volgende potentiaal beschouwen

$$V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = e [\varphi(\mathbf{r}, t) - \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)] . \quad (3.1.13)$$

Hierin is e de elektrische lading en zijn φ en $\mathbf{A}$ de electromagnetische skalare potentiaal en vector potentiaal die het elektrische veld $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ en het magnetische veld $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ bepalen volgens de regel

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} , \quad (3.1.14)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A} . \quad (3.1.15)$$

De Lorentzkracht die door deze velden op een deeltje met lading e wordt uitgeoefend is

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = e [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \dot{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)] . \quad (3.1.16)$$

Opgave 23 Beschouw

- (a) een electrostatisch veld

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi r} \quad \mathbf{A} = 0 . \quad (3.1.17)$$

(b) een homogeen magnetisch veld

$$\varphi = 0 \quad \mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{B} \wedge \mathbf{r} \quad (3.1.18)$$

en geef de bijbehorende uitdrukkingen voor de Lorentz kracht.

We zullen nu bewijzen dat substitutie van de potentiaal (3.1.13) in het voorschrift (3.1.11) inderdaad de Lorentzkracht (3.1.16) oplevert. Deze substitutie geeft als eerste resultaat

$$\mathbf{F} = -e \left[\nabla \varphi - \nabla(\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{r}}) + \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right] \quad (3.1.19)$$

Voor een gegeven baan $\mathbf{r}(t)$ is de totale tijdafgeleide van de functie $\mathbf{A}$

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \left(\dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla + \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathbf{A} \quad (3.1.20)$$

De laatste term combineert met de eerste term in (3.1.19) tot $\mathbf{E}$. Aangezien (3.1.19) gelijk moet zijn aan (3.1.16) geldt kennelijk

$$\dot{\mathbf{r}} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) = \nabla(\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{r}}) - (\dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla) \mathbf{A} \quad (3.1.21)$$

Dit is inderdaad een vector-identiteit.

Opgave 24 Bewijs de identiteit (3.1.21) met behulp van de vectorregel

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} \quad (3.1.22)$$

en uitschrijven in componenten.

3.1.3 Gegeneraliseerde coördinaten

Het is niet altijd even handig om een mechanisch systeem te beschrijven m.b.v. cartesische coördinaten. In sommige situaties kan het voor de hand liggen pool-, bol- of andere (eventueel niet-rechthoekige) coördinaten te gebruiken. Ook kan er sprake zijn van restricties op de beweging: de kralen van een telraam bewegen slechts langs een rechte; een slinger rond een vast rotatiepunt beweegt op een boloppervlak, etc. Dit soort van restricties wordt gekarakteriseerd door één of meer vergelijkingen van de vorm

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, t) = 0 \quad (3.1.23)$$

Men spreekt van holonome restricties. Niet-holonome restricties bespreken we hier niet. Een voorbeeld uit deze laatste categorie is de beweging van deeltjes die opgesloten zijn in een doos.

Zowel in het geval van een coördinaten-transformatie als ook in dat van restricties, mits holonoom, mogen we veronderstellen dat er n variabelen $q_1, q_2, \dots, q_n$ bestaan die de configuratie van het systeem ondubbelzinnig vastleggen, terwijl ook

omgekeerd elke toegestane configuratie met een greep van n getallen $\{q_i\}$ correspondeert. De onafhankelijke variabelen $\{q_i\}$ heten de (gegeneraliseerde) coördinaten. Hun aantal n noemt men het aantal vrijheidsgraden van het systeem. Voor een systeem van N deeltjes met R restricties van het holonome type wordt het aantal vrijheidsgraden gegeven door $n = 3N - R$. Het interval van iedere coördinaat wordt bepaald door de aard van het systeem. Het is niet gezegd dat de gegeneraliseerde coördinaten de dimensie van lengte moeten hebben, noch dat zij uniek zijn.

We zullen nu een zeer belangrijke eigenschap van de Lagrange vergelijkingen bewijzen, nl. dat deze vergelijkingen invariant zijn voor de keuze van de gegeneraliseerde coördinaten. Eenvoudigheidshalve bekijken we één enkel deeltje, waarvoor we een aantal gegeneraliseerde coördinaten $\{q_i\}$ kiezen. Afhankelijk van de restricties is n gelijk aan drie, twee, of één. De carthesische coördinaten zijn functies van deze nieuwe coördinaten:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(q_i(t)) \quad . \quad (3.1.24)$$

Voor de tijdafgeleide geldt

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}(t)}{\partial q_i(t)} \dot{q}_i(t) \quad . \quad (3.1.25)$$

Dit kunnen we zien als een lineaire transformatie van de snelheden, met coëfficiënten gegeven door de $3 \times n$ transformatie-matrix $\partial \mathbf{r} / \partial q_i$. In formule (3.1.25) gebruiken we de zogenaamde *sommative conventie*. Dit is de afspraak dat over indices die in paren voorkomen gesommeerd wordt over alle toegestane waarden.

Opgave 25 Ga na dat $\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}(q, \dot{q})$ afhangt van zowel $\dot{q}_i$ als q_i . Dit is belangrijk!

We bekijken nu de Lagrange vergelijkingen (3.1.10) invermenigvuldigd met $\partial \mathbf{r} / \partial q_i$

$$\left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \right] \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = 0 \quad . \quad (3.1.26)$$

Dit zijn dus n onafhankelijke lineaire combinaties van het oorspronkelijke drietal vergelijkingen. We kunnen dit zien als een projectie op de relevante vrijheidsgraden. Na een partiële integratie ontstaat

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = 0 \quad . \quad (3.1.27)$$

Opgave 26 Laat zien dat geldt

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \quad , \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial q_i} \quad . \quad (3.1.28)$$

Maak gebruik van het feit dat de totale tijdafgeleide de volgende vorm heeft

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}_i \frac{\partial}{\partial q_i} + \ddot{q}_i \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \quad (3.1.29)$$

als de afgeleide wordt genomen van een functie van t , q_i en $\dot{q}_i$.

Met beide hulpformules uit Opgave 26 wordt dit

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = 0 . \quad (3.1.30)$$

Als we L opvatten als een functie $L(q_i, \dot{q}_i)$ volgt uit het laatste resultaat met de kettingregel

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad , \quad (3.1.31)$$

hetgeen de getransformeerde Lagrange-vergelijkingen zijn.

Het Lagrange-formalisme is dus invariant onder coördinaten transformaties (3.1.24) en (3.1.25). Het bovenstaande bewijs is eenvoudig te generaliseren tot het geval van meerdere deeltjes en voor transformaties $\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_i, t)$ die de tijd expliciet bevatten.

We merken op dat in het Lagrange-formalisme bij differentiaties naar $\dot{q}_i$, altijd alle $\dot{q}_j \neq \dot{q}_i$ en alle q_i constant gehouden worden. Eenzelfde regel is van toepassing bij differentiaties naar q_i . Dus het paar $\{q_i, \dot{q}_i\}$ wordt aanvankelijk geacht onafhankelijk te zijn, hoewel het natuurlijk wel zo is dat na oplossing van de bewegingsvergelijkingen de baan $q_i(t)$ meteen ook de snelheid $\dot{q}_i(t)$ geeft.

Opgave 27 *Laat zien dat de kinetische energie in de nieuwe coördinaten de vorm*

$$T = \frac{1}{2} M_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \quad (3.1.32)$$

heeft. Identificeer de coëfficiënten M_{ij} van de zogeheten massamatrix.

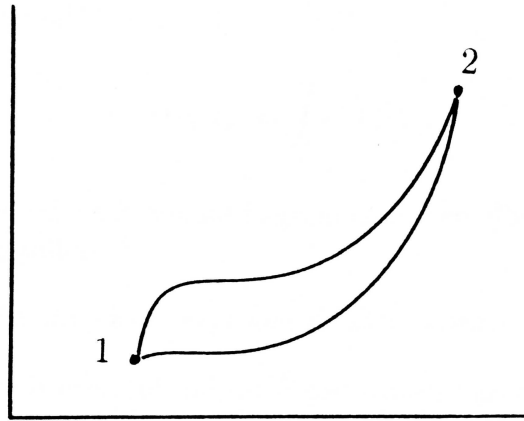
Voor willekeurige gegeneraliseerde coördinaten zijn de Lagrange-vergelijkingen equivalent met de Newton vergelijkingen, mits de krachten conservatief zijn. Essentieel is dat de Lagrange-vergelijkingen alleen de onafhankelijke coördinaten bevatten. Eventuele restricties zijn daardoor automatisch verdisconteerd. Voor deze algemeenheid moet echter ook een prijs betaald worden omdat de Lagrange-vergelijkingen niet meer de eenvoudige vorm van “kracht is massa maal versnelling” hebben. Bij uitwerken van de Lagrange-vergelijkingen (3.1.31) met behulp van de regel (3.1.27) vinden we

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} \dot{q}_j \quad . \quad (3.1.33)$$

De versnelling wordt nu niet meer vermenigvuldigd met een scalaire massa maar met een massa-matrix M_{ij} die inverteerbaar moet zijn

$$\det(M_{ij}) = \det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right) \neq 0 \quad (3.1.34)$$

opdat de bewegingsvergelijkingen geïntegreerd kunnen worden. Of dit het geval is hangt af van het systeem, en ook van de gekozen gegeneraliseerde coördinaten. Als de Lagrangiaan singulier is voor een bepaalde keuze van de coördinaten, dan zijn



Figuur 3.1: Twee paden in de configuratieruimte

niet alle vergelijkingen van de set (3.1.33) echt tweede-orde bewegingsvergelijkingen. Er is dan een nadere wiskundige analyse nodig.

We laten het hier bij de opmerking dat het al dan niet singulier zijn van de Lagrangiaan essentieel is voor de overgang van het Lagrange- naar het Hamilton-formalisme dat we later bespreken.

Opgave 28 *Beschouw de transformatie (3.1.24), zonder restricties, naar willekeurige kromlijnige coördinaten $\{q_i\}$.*

(a) *Laat zien dat de infinitesimale afstand $ds^2 := d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}$ te schrijven is als*

$$ds^2 = g_{ij} dq_i dq_j \quad .$$

Men noemt de matrix g_{ij} de metrische tensor. Geef hiervoor een uitdrukking.

(b) *Bewijs het verband*

$$M_{ij} = mg_{ij}$$

tussen de massamatrix en de metrische tensor.

3.2 Principe van Hamilton

3.2.1 Aktieintegraal

De configuraties van een mechanisch systeem met n vrijheidsgraden wordt beschreven door een set gegeneraliseerde coördinaten $\{q_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Dit kunnen we weergeven in een n -dimensionale denkbeeldige configuratieruimte waarin ieder punt q correspondeert met een greep van n getallen $q = \{q_i\}$.

De beweging in de tijd van het systeem correspondeert met een zekere continue baan in de configuratieruimte. Als de beginconfiguratie $q(t_1) = \{q_i(t_1)\}$ is gegeven, alsmede de aanvangssnelheden $\dot{q}(t_1) = \{\dot{q}_i(t_1)\}$, wordt de baan uniek gegeven door de bewegingsvergelijkingen. Immers, de oplossingen van de tweede-orde differentiaalvergelijkingen bevatten altijd twee willekeurige integratieconstanten die we met deze begincondities kunnen vastleggen. We kunnen echter ook een baan vastleggen door de begin- en eindconfiguraties $q(t_1)$ en $q(t_2)$ te specificeren. De eindconfiguratie moet dan natuurlijk wel bereikbaar zijn vanuit het beginpunt.

Stel we beschouwen nu in de configuratieruimte een continu pad $q(t)$, met beginpunt $q(t_1)$ en eindpunt $q(t_2)$. Er zijn vele van deze paden denkbaar (men spreekt van virtuele banen), maar er is maar één pad dat de werkelijke baan van het systeem representeert. Deze unieke baan is de oplossing van de Lagrange-vergelijkingen. Niettemin kunnen we langs iedere virtuele baan $q(t)$, voor een gegeven Lagrangiaan $L(q, \dot{q})$, een functie van de tijd definiëren volgens

$$L(t) = L(q(t), \dot{q}(t)) \quad , \quad (3.2.1)$$

waarin $\dot{q}(t)$ de raakvector langs het gegeven pad is. Voor ieder pad bestaat ook de “aktieintegraal”

$$S(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} dt L(t) \quad . \quad (3.2.2)$$

Dus de actieintegraal geeft, via de Lagrangiaan, een afbeelding van de functie $q(t)$ op de reële getallen.

Opgave 29 *Welke dimensie moet aan de actie worden toegekend?*

Wiskundig wordt een funktionaal F gedefiniëerd als een afbeelding van een functie, zeg $f(x)$, op de reële (of complexe) getallen. Een eenvoudig voorbeeld is

$$F[f] = \int f(x) dx \quad . \quad (3.2.3)$$

Men schrijft de rechte haken om aan te geven dat men een functie van functies bedoelt.

De actieintegraal (3.2.2) is ook een funktionaal. In het onderhavige geval spreekt men van de *aktiefunktionaal* waarvoor men de notatie $S[q(t)]$ hanteert:

$$S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q(t), \dot{q}(t)) \quad . \quad (3.2.4)$$

Als $q(t)$ gegeven is op alle tijdstippen, is daarmee ook $\dot{q}(t)$ bekend. We hoeven dus $\dot{q}(t)$ niet apart als argument van S te vermelden.

3.2.2 Variatieprincipe

We hebben hierboven al vastgesteld dat de werkelijke baan van een systeem wordt vastgelegd door de oplossing van de corresponderende Lagrange vergelijkingen. Het blijkt dat deze fysische baan op een uiterst eenvoudige wijze gekarakteriseerd wordt door de aktieintegraal. Dit is het aktieprincipe van Hamilton (door deze geformuleerd in 1834), dat stelt:

- De aktiefunctionaal $S[q(t)]$ is minimaal voor de baan $q(t)$ die voldoet aan de oplossing van de bewegingsvergelijkingen (3.1.31).

De eerste aanzet voor een dergelijk principe van minimale aktie is reeds eerder te vinden in het werk van de franse wiskundige en sterrenkundige Pierre Louis Moreau de Maupertius (1698-1759), die hieraan een metafysische betekenis toekende. Hieronder zullen we laten zien dat het principe van Hamilton niets anders is dan een fraaie herformulering van de wetten van de mechanica in één enkele vergelijking. Voor praktische problemen volgt daaruit niets nieuws. Vanwege de eenvoud spelen aktieprincipes echter wel vaak een belangrijke rol in theoretische beschouwingen. Dit beperkt zich niet tot de klassieke mechanica.

Het principe van Hamilton is volstrekt equivalent met de vergelijkingen van Lagrange. Om dit laatste te bewijzen maken we gebruik van de variatierekening van Euler en Lagrange. Daarin wordt de variatie van een pad $q(t)$ gedefinieerd door een nieuw pad te beschouwen

$$\bar{q}(t) = q(t) + \varepsilon \alpha(t) \quad , \quad (3.2.5)$$

met $\alpha(t)$ een willekeurige funktie van t . Als ε voldoende klein is, zal het nieuwe pad slechts weinig van het oude pad afwijken. Voor de afwijking schrijft men

$$\delta q(t) = \bar{q}(t) - q(t) = \varepsilon \alpha(t) \quad . \quad (3.2.6)$$

In het spraakgebruik heet de hier gedefiniëerde funktie $\delta q(t)$ de *variatie* van $q(t)$.

In de methodiek van de variatierekening worden nu verschillende mogelijke paden die een oplossing van het dynamische probleem zouden kunnen zijn uitgete probeerd. Vervolgens wordt een voorschrift gegeven om hieruit de juiste oplossing te kiezen.

We beschouwen i.h.b. allerlei paden die het systeem zou kunnen doorlopen, waarbij we als enige beperking houden dat de posities van het begin- en eindpunt niet gewijzigd worden bij variatie van de baan: $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$. Bij al deze verschillende banen kunnen we de aktieintegraal uitrekenen, en i.h.a. zal dit voor iedere baan een ander resultaat als uitkomst hebben. Voor twee nabijgelegen banen wordt dit verschil gegeven door de variatie van de aktie die we geheel analoog aan (3.2.6) definiëren als

$$\delta S[q(t)] = S[\bar{q}(t)] - S[q(t)] \quad . \quad (3.2.7)$$

Op grond van het Hamilton-principe mogen we stellen dat de fysische baan $q(t)$ wordt gekarakteriseerd door

$$\delta S[q(t)] = 0 \quad . \quad (3.2.8)$$

Immers, dit principe postuleert dat de aktieintegraal minimaal is. Een noodzakelijke voorwaarde is dat de aktie niet verandert voor kleine variaties van de fysische baan.

Men zegt dat de aktie *stationair* is voor de fysische baan. Het Hamilton-principe zegt ook dat S daar een minimum bereikt. Dit blijkt in vrijwel alle gevallen inderdaad het geval te zijn. Dus de stationariteit van de aktie bepaalt in deze aanpak de bewegingsvergelijkingen.

3.2.3 Euler-Lagrange Vergelijkingen

De variatie van de aktie kunnen we berekenen in termen van de variatie van de Lagrangiaan

$$\delta S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} dt \delta L(t) \quad (3.2.9)$$

met

$$\delta L(t) = L(q(t) + \delta q(t), \dot{q}(t) + \delta \dot{q}(t)) - L(q(t), \dot{q}(t)) \quad . \quad (3.2.10)$$

We ontwikkelen de eerste term en nemen slechts bijdragen die van de eerste orde in ε zijn in beschouwing:

$$\delta L(t) = \frac{\partial L}{\partial q} \delta q(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q}(t) + O(\varepsilon^2) \quad . \quad (3.2.11)$$

Uit de definitie (3.2.6) van de variatie volgt

$$\delta \dot{q}(t) = \frac{d}{dt} \delta q(t) \quad . \quad (3.2.12)$$

Door partieel integreren van de tweede term in (3.2.11) ontstaat

$$\delta L(t) = \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right] \delta q(t) + \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q(t) \right] \quad . \quad (3.2.13)$$

De integraal over de tijd tussen de tijdstippen t_1 en t_2 geeft de variatie van de aktie (3.2.9),

$$\delta S[q(t)] = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q(t) \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right] \delta q(t) \quad , \quad (3.2.14)$$

waarvan het Hamilton-principe zegt dat deze nul moet zijn. Aangezien de variaties $\delta q(t)$ aan begin en eindpunt nul worden genomen, levert de stok-term geen bijdrage. Blijft over de tweede term die nul moet zijn voor willekeurige variaties $\delta q(t)$. Daaraan is alleen voldaan als geldt

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad , \quad (3.2.15)$$

hetgeen de Lagrange-vergelijkingen zijn. In wiskundige terminologie zegt men dat (3.2.15) de Euler-Lagrange vergelijkingen zijn van het variatieprincipe. Deze naamgeving is een erkenning voor de belangrijke bijdragen aan de wiskundige variatierekening door de zwitserse wiskundige Leonhard Euler (1707-1783).

Opgave 30 *De Lagrange-vergelijkingen veranderen niet onder een ijktransformatie die eruit bestaat dat men de totale tijdafgeleide van een willekeurige funktie $\Omega(q, t)$ aan L toevoegt:*

$$L \rightarrow L + \frac{d}{dt}\Omega \quad . \quad (3.2.16)$$

(a) *Bewijs dit m.b.v. het Hamilton-principe.*

(b) *Door substitutie in de Lagrange-vergelijkingen.*

Het aktieprincipe van de klassieke mechanica levert ons precies één baan, namelijk die waarvoor de variatie van de aktie in eerste orde nul is. Alle andere banen zijn virtueel, d.w.z. deze worden in werkelijkheid niet gerealiseerd. Uit de quantummechanica weten we echter dat we de baan van een systeem nooit met een dergelijke precisie kunnen vastleggen. Immers, plaats en snelheid zijn twee complementaire grootheden die niet tegelijk met oneindige nauwkeurigheid gemeten kunnen worden. Het zou dus wel eens zo kunnen zijn dat ook virtuele banen een zekere waarschijnlijkheid hebben. Dit idee van P.A.M. Dirac is door R.P. Feynman verder uitgewerkt in zijn “pad-integraal” formulering van de quantummechanica. Daarin heeft ieder pad in de configuratie-ruimte een zekere (complexe) waarschijnlijkheid

$$w[q(t)] \sim e^{\frac{i}{\hbar}S[q(t)]} \quad , \quad (3.2.17)$$

die bepaald wordt door de aktieintegraal gedeeld door de constante van Planck. Voor macroscopische systemen is de aktie S zo groot vergeleken met $\hbar$ dat de afwijkingen van de klassieke baan door destructieve interferentie niet waarneembaar zijn. In quantumsystemen kunnen deze “quantumfluctuaties” juist heel groot zijn.

3.3 Behoudswetten

Symmetry is one idea by which man through the ages has tried to comprehend and create order, beauty and perfection.

Hermann Weyl
1885-1955

3.3.1 Behouden Grootheden

De toestand van een mechanisch systeem met n vrijheidsgraden wordt beschreven door n coördinaten $q = \{q_i\}$ en n snelheden $\dot{q} = \{\dot{q}_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Tijdens de beweging van het systeem veranderen deze toestandsvariabelen als funktie van de tijd. Er zijn echter bepaalde funkties van coördinaten en snelheden, die ongeacht de beweging, dezelfde waarde houden en alleen afhangen van de begincondities:

$$C(t) = C(q(t), \dot{q}(t)) = C(t = 0) \quad . \quad (3.3.1)$$

Voor een systeem van n vrijheidsgraden kunnen in principe $2n - 1$ van dergelijke bewegingsconstanten gedefinieerd worden. Dit aantal is gelijk aan het aantal willekeurige integratieconstanten, minus één die correspondeert met de keuze van het begintijdstip. De meeste van deze bewegingsconstanten zijn niet expliciet bekend omdat daarvoor eerst de oplossing geconstrueerd moet worden.

Er bevinden zich onder deze bewegingsconstanten echter een aantal met de belangrijke eigenschap dat de additief zijn; dit noemt men de behouden grootheden. Voor een geïsoleerd mechanisch systeem zijn dat, behalve de massa M , de volgende tien: energie E , impuls $\mathbf{P}$, impulsmoment $\mathbf{L}$, en zwaartepuntsbeweging $\mathbf{K} = M\mathbf{R} - \mathbf{P}t$. Deze behouden grootheden zijn van essentiële betekenis voor een kwalitatieve beschrijving van de beweging. Vaak geeft een behouden grootheid meer inzicht dan de complete oplossing die in de meeste gevallen slechts numeriek te verkrijgen is.

Zoals we zullen laten zien, bestaat er direct verband tussen behoudswetten en symmetrieën. Wiskundig wordt een symmetrie gerepresenteerd door een groep van transformaties op de coördinaten $q(t)$ en snelheden $\dot{q}(t)$ die de bewegingsvergelijkingen onveranderd laat; zie §2.3.4. I.h.b. zijn de bovengenoemde behoudswetten een direct gevolg van het feit dat positie, tijd, richting en snelheid slechts relatieve begrippen zijn. De bewegingsvergelijkingen moeten daarom invariant zijn voor verplaatsingen:

$$\begin{aligned} t &\rightarrow t + \tau \quad , \\ \mathbf{x} &\rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{d} \quad , \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

draaiingen:

$$\mathbf{x} \rightarrow R\mathbf{x} \quad , \tag{3.3.3}$$

en Galilei transformaties:

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{u}t \quad . \tag{3.3.4}$$

Hieronder zullen we bewijzen dat de invariantie van de theorie onder deze transformaties, die tesamen de Galilei-groep vormen, inderdaad de genoemde behoudswetten impliceert.

Het inzicht dat de fundamentele symmetrieën van de fysische ruimte-tijd: homogeniteit, isotropie, en relativiteit, ten grondslag liggen aan de basale behoudswetten van de mechanica, strekt zich ook uit tot de relativiteitstheorie, de quantummechanica, en de quantumveldentheorie. Nog algemener kunnen we stellen dat iedere symmetrie, ruimte-tijd of intrinsiek, van een fysisch systeem vertaald kan worden in een behoudswet. Dit staat bekend als de stelling van Noether, genoemd naar de wiskundige Emmy Noether (1882-1935) die deze stelling in 1918 formuleerde.

3.3.2 Tijdtranslatie

We bekijken eerst de behoudswet die het gevolg is van het feit dat de bewegingsvergelijkingen die een geïsoleerd systeem beschrijven niet mogen afhangen van het

gekozen begintijdstip. Anders gezegd, de Lagrangiaan van een dergelijk systeem kan niet expliciet afhangen van de tijd, maar uiteraard wel impliciet

$$L(t) = L(q(t), \dot{q}(t)) \quad . \quad (3.3.5)$$

De totale tijdafgeleide van L is dus

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q} \quad . \quad (3.3.6)$$

Een partiële afgeleide naar de tijd komt dus niet voor. In de eerste term substitueren we nu de Lagrange vergelijkingen (3.1.13), waardoor met een partiële integratie ontstaat

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} \right) \quad . \quad (3.3.7)$$

Hieruit zien we dat de skalaire grootheid

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L \quad , \quad (3.3.8)$$

die de Hamilton-functie wordt genoemd, behouden is in de tijd.

Opgave 31 *Veralgemeen het bovenstaande bewijs, en laat zien dat geldt*

$$\frac{dH}{dt} = - \frac{\partial L}{\partial t} \quad , \quad (3.3.9)$$

als de Lagrangiaan expliciet afhangt van de tijd.

Voor een conservatief systeem is de boven bewezen behoudswet niets anders dan de wet van behoud van energie, maar nu afgeleid op basis van een symmetrie argument. Immers, in carthesische coördinaten heeft de Lagrangiaan de vorm (3.1.6). Voor dit geval berekenen we

$$H = \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \cdot \dot{\mathbf{r}} - (T - V) \quad . \quad (3.3.10)$$

Uit (3.1.3) blijkt dat de eerste term gelijk is aan $2T$. Dus volgt

$$H = T + V = E \quad . \quad (3.3.11)$$

Als de potentiaalfunctie de tijd niet expliciet bevat is de energie behouden; vandaar ook de naam *conservatief systeem*.

Opgave 32 *Veronderstel dat de Lagrangiaan de vorm*

$$L = \frac{1}{2} M_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - V(q_i) \quad (3.3.12)$$

heeft.

(a) Bereken

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} 2T \quad . \quad (3.3.13)$$

(b) Laat zien dat H de som van T plus V is.

Uit de bovenstaande opgaven mogen we concluderen dat H gelijk is aan de energie van het systeem, mits (i) de kinetische energie een homogene kwadratische functie van de snelheden is en (ii) de potentiële energie V niet afhangt van de snelheden. Als V expliciet afhangt van t dan is H niet behouden maar wel gelijk aan E .

Opgave 33 Beschouw een deeltje in een tijdonafhankelijk uitwendig elektromagnetisch veld, waarvan de potentialen $\varphi(\mathbf{x})$ en $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ zijn. Laat zien dat

$$H = T + e\varphi \quad (3.3.14)$$

de behouden energie voor dit geval is; merk op dat H niet de som van T en V is.

3.3.3 Ruimtetranslatie

Met de uitspraak dat de ruimte homogeen is bedoelt men dat de eigenschappen van een geïsoleerd mechanisch systeem, gezien vanuit een inertiaalstelsel, niet veranderen als het systeem in zijn geheel verplaatst wordt. Bij deze ruimtelijke translatie wordt ieder deeltje van het systeem over dezelfde afstand verschoven:

$$\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{r}_i + \delta\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i + \boldsymbol{\varepsilon} \quad . \quad (3.3.15)$$

We hebben al eerder gezien in §2.3.4 dat de bewegingsvergelijkingen niet veranderen onder deze transformatie. De Lagrangiaan die een geïsoleerd systeem beschrijft moet dus invariant zijn onder ruimtelijke translatie:

$$\begin{aligned} \delta L &= L(\mathbf{r}_i + \delta\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i) - L(\mathbf{r}_i, \dot{\mathbf{r}}_i) \\ &= \sum_i \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = 0 \quad , \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

waarbij we de verschuiving $\boldsymbol{\varepsilon}$ infinitesimaal hebben genomen. Met de Lagrangevergelijkingen krijgen we:

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{p}_i \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = 0 \quad , \quad (3.3.17)$$

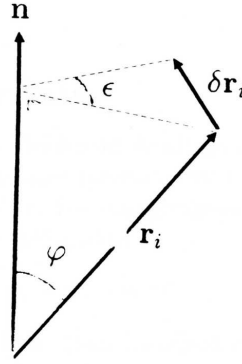
waarin

$$\mathbf{p}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \quad (3.3.18)$$

de zogenaamde *kanonieke impuls* is. Omdat $\boldsymbol{\varepsilon}$ willekeurig is, mogen we concluderen dat de totale kanonieke impuls

$$\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i \quad (3.3.19)$$

voor een gesloten systeem behouden is.



Figuur 3.2: Infinitesimale draaiing rond de as $\mathbf{n}$.

Opgave 34 *Ga zelf na dat:*

- (a) voor een conservatief systeem $\mathbf{P}$ de totale impuls is zoals eerder gedefinieerd;
- (b) voor een deeltje in een uitwendig electromagnetisch veld de impuls volgens de definitie (3.3.18) gegeven wordt door

$$\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}} + e\mathbf{A} \quad . \quad (3.3.20)$$

Onder welke omstandigheden is deze kanonieke impuls behouden?

3.3.4 Rotatie

Als gevolg van de isotropie van de ruimte, hangen de eigenschappen van een gesloten mechanisch systeem niet af van de oriëntatie in een inertiaalstelsel. We kunnen dus een rotatie uitvoeren waarbij we de positievector van ieder deeltje draaien rond een gekozen as $\mathbf{n}$:

$$\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{r}_i + \delta\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i + \varepsilon\mathbf{n} \wedge \mathbf{r}_i \quad . \quad (3.3.21)$$

Hierin is ε een kleine hoek. Dit stelt inderdaad een draaiing voor. Immers, $\delta\mathbf{r}_i$ moet loodrecht staan op het vlak gegeven door $\mathbf{n}$ en $\mathbf{r}_i$. Verder is de grootte van de verplaatsing: $|\delta\mathbf{r}_i| = \varepsilon|\mathbf{r}_i| \sin \varphi$. Tenslotte vormen de richtingen $\mathbf{n}$, $\mathbf{r}_i$ en $\delta\mathbf{r}_i$ een rechtse schroef.

De snelheden veranderen ook bij deze draaiing

$$\dot{\mathbf{r}}_i \rightarrow \dot{\mathbf{r}}_i + \varepsilon\mathbf{n} \wedge \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_i + \delta\dot{\mathbf{r}}_i \quad . \quad (3.3.22)$$

De Lagrangiaan moet echter onder deze rotatie invariant blijven:

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \delta\mathbf{r}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \cdot \delta\dot{\mathbf{r}}_i = 0 \quad . \quad (3.3.23)$$

In de eerste term van het tweede lid gebruiken we de Lagrange-vergelijkingen. Dan vinden we meteen

$$\delta L = \frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{p}_i \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0 \quad , \quad (3.3.24)$$

waarin $\mathbf{p}_i$ voor de kanonieke impuls (3.3.18) staat.

We hebben dus weer een behouden grootte gevonden die naar men kan opmerken qua vorm sterk lijkt op die voor de behouden impuls (3.3.17). Het verschil zit in de variaties $\delta \mathbf{r}_i$ die in het onderhavige geval gegeven worden door formule (3.3.21). Na invullen en cyclisch verwisselen van de factoren ontstaat

$$\frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{n} = 0 \quad . \quad (3.3.25)$$

Aangezien de richting $\mathbf{n}$ willekeurig gekozen mag worden vinden we dat het kanonieke impulsmoment

$$\mathbf{J} = \sum_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{p}_i \quad (3.3.26)$$

behouden is voor een gesloten systeem. Net zoals de totale impuls is deze grootte additief, los van het feit of de deeltjes wisselwerken of niet.

In bepaalde omstandigheden kan de behoudswet van impulsmoment ook van toepassing zijn voor een systeem in een uitwendig veld. Het volgt namelijk direct uit de gegeven afleiding dat, als het veld rotatie-symmetrisch is rond een bepaalde as $\mathbf{n}$, de component van het impulsmoment $\mathbf{L} \cdot \mathbf{n}$ in die richting behouden is. Voorwaarde is wel dat de oorsprong ergens op de symmetrie-as ligt. Het belangrijkste voorbeeld is een centraal-symmetrisch krachtveld, d.w.z. een veld waarvan de potentiaal slechts afhangt van de afstand tot een gegeven punt. Dan is het impulsmoment t.o.v. dit punt behouden ongeacht de oriëntatie.

Opgave 35 *Veronderstel dat een deeltje beweegt in een veld dat cylinder-symmetrisch is rond de z -richting. Laat zien dat het impulsmoment*

$$J_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \quad (3.3.27)$$

behouden is. Hierin is de coördinaat θ de rotatiehoek rond de z -as.

3.3.5 Galilei-transformatie

Het relativiteitsprincipe van Galilei omvat de uitspraak dat de bewegingsvergelijkingen van een mechanisch systeem onveranderd moeten blijven bij overgang naar een bewegend inertiaalstelsel. De bewegingsvergelijkingen moeten dus invariant zijn onder de Galilei-transformatie

$$\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{r}_i + \mathbf{u}t \quad , \quad (3.3.28)$$

waarbij $\mathbf{u}$ een constante snelheid is. Deze invariantie laat zich op dezelfde wijze behandelen als andere invarianties, echter met één nieuw element. We kunnen namelijk niet eisen dat de Lagrangiaan onder de transformatie (3.3.28) invariant is, aangezien de kinetische energieën in de twee inertiaalstelsels gerelateerd zijn volgens

$$T \rightarrow T + \mathbf{u} \cdot \mathbf{P} + \frac{1}{2} M \mathbf{u}^2 \quad , \quad (3.3.29)$$

waarin $\mathbf{P}$ de totale impuls en M de totale massa zijn.

Opgave 36 *Controleer formule (3.3.29) door transformatie van de kinetische energie. Kun je het resultaat ook in woorden uitleggen?*

Als de transformatie infinitesimaal is: $\mathbf{u} = \boldsymbol{\varepsilon}$, mogen we voor (3.3.29) schrijven:

$$T \rightarrow T + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \frac{d}{dt} \sum_i m_i \mathbf{r}_i \quad . \quad (3.3.30)$$

We veronderstellen nu dat de potentiaal V invariant is onder een Galilei “boost”, hetgeen het geval is als V translatie-invariant is en niet afhangt van de snelheden. Dan is het resultaat dat de Lagrangiaan onder een infinitesimale Galilei-transformatie covariant transformeert, hetgeen wil zeggen:

$$\delta L = \frac{d}{dt} \delta \Lambda \quad . \quad (3.3.31)$$

Dit noemt men Galilei-invariantie. De toevoeging van de totale tijdafgeleide is geen probleem aangezien we weten dat dit de bewegingsvergelijkingen niet verandert; zie Opgave 30.

Opgave 37 *Identificeer de grootheid $\delta \Lambda$ in formule (3.3.31).*

De behoudswet die hiermee geassocieerd is, wordt gemakkelijk gevonden door terug te gaan naar de twee vergelijkingen (3.3.23) en (3.3.24). We vervangen daarin de nul door het rechterlid van (3.3.31). We zien dan onmiddellijk in dat covariantie van de Lagrangiaan onder een willekeurige transformatie $\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{r}_i + \delta \mathbf{r}_i$, aanleiding geeft tot de volgende vergelijking

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i \mathbf{p}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i - \delta \Lambda \right) = 0 \quad . \quad (3.3.32)$$

Voor het geval van een Galilei-transformatie en een translatie-invariante conservatieve potentiaal, leren we hieruit dat de grootheid

$$\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{K} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \left(\sum_i m_i \mathbf{r}_i - t \sum_i \mathbf{p}_i \right) \quad (3.3.33)$$

behouden is. Deze behoudswet zegt dus dat de zwaartepuntsbeweging van een geïsoleerd systeem éénparig is. Men kan dit zien als de formulering van de traagheidswet voor samengestelde systemen, als generalisatie van de traagheidswet voor één enkel deeltje.

Een belangrijk corollarium is nog dat we altijd een inertiaalstelsel kunnen vinden waarin de totale impuls van het systeem nul is: $\mathbf{P} = 0$. Dit inertiaalstelsel wordt het ruststelsel genoemd omdat het zwaartepunt van het systeem daarin in rust blijft. De eigenschappen van een gesloten systeem worden bij voorkeur vanuit dit ruststelsel bestudeerd.

Opgave 38 *Geef de transformatieformule van de kinetische energie voor een Galilei-transformatie vanuit het ruststelsel.*

3.3.6 Theorema van Noether

Het is mogelijk alle hierboven behandelde gevallen samen te vatten in één enkele stelling die bekend staat als het *Noether-theorema*. Deze stelling is van toepassing op iedere theorie waarvoor een Lagrangiaan te definiëren is; dit kan een mechanische theorie zijn, maar ook een klassieke of quantummechanische veldentheorie. In als deze gevallen geeft de Noether-stelling het voorschrift hoe bij een gegeven symmetrie van de Lagrangiaan de corresponderende behouden grootte geconstrueerd kan worden.

We stellen eerst vast dat de Lagrangiaan alle informatie over de dynamica van een systeem bevat. Bovendien hebben we gezien dat de vorm van de Lagrange-vergelijkingen ongewijzigd blijft onder een zeer ruime klasse van coördinaten transformaties. We beschouwen hier speciaal transformaties van de vorm:

$$t \rightarrow \bar{t} = \bar{t}(t) \quad , \quad (3.3.34)$$

$$q \rightarrow \bar{q} = \bar{q}(q, t) \quad , \quad (3.3.35)$$

die men punttransformaties noemt. Alle ruimte-tijd transformaties die hierboven aan de orde zijn geweest: translaties, rotaties, en Galilei-transformaties, zijn punttransformaties. Een dergelijke transformatie induceert ook een transformatie van de Lagrangiaan

$$L(q, \dot{q}, t) \rightarrow \bar{L}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, \bar{t}) \quad . \quad (3.3.36)$$

In het algemeen zal de nieuwe Lagrangiaan $\bar{L}$ een andere functie van coördinaten en snelheden zijn dan de oorspronkelijke Lagrangiaan L . Als echter de Lagrangiaan invariant is onder de transformatie dan geldt dat de funktionele vorm dezelfde blijft:

$$\bar{L}(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) \quad . \quad (3.3.37)$$

Dit heeft tot gevolg dat de bewegingsvergelijkingen precies dezelfde vorm houden, waaruit we kunnen concluderen dat de beschouwde transformatie een 1-1 afbeelding is in de oplossingsruimte van deze bewegingsvergelijkingen, m.a.w. $q(t)$ en $\bar{q}(t)$ zijn twee verschillende fysische banen in de configuratieruimte van hetzelfde systeem.

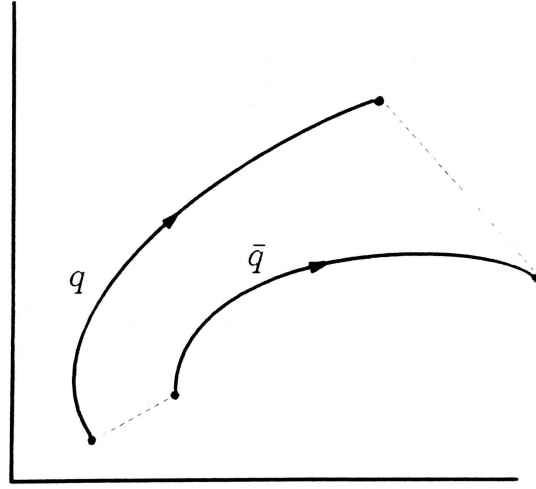
Men noemt een dergelijke transformatie een symmetrie. Dit is dus een transformatie die de Lagrangiaan invariant laat, of iets algemener, niet meer dan een totale tijdafgeleide aan de Lagrangiaan toevoegt:

$$\bar{L}(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt}\Lambda(q, t) \quad , \quad (3.3.38)$$

waarbij Λ een functie is die slechts mag afhangen van de coördinaten, en eventueel de tijd. In dit iets algemenere geval van een symmetrietransformatie zegt men dat de Lagrangiaan “covariant” transformeert.

Een symmetrietransformatie kan discreet zijn, zoals bij symmetrieën in een kristal, of continu, zoals in de bovenbeschouwde voorbeelden. In het laatste geval kunnen we ons beperken tot infinitesimale transformaties

$$t \rightarrow t + \delta t \quad , \quad (3.3.39)$$



Figuur 3.3: Translatie van $q(t)$ in de configuratieruimte.

$$q \rightarrow \bar{q} + \delta q \quad . \quad (3.3.40)$$

Immers, ook onder een infinitesimale symmetrietransformatie zal L invariant, dan wel covariant met een infinitesimale $\delta\Lambda$, transformeren:

$$\delta L = \frac{d}{dt} \delta\Lambda \quad . \quad (3.3.41)$$

De variatie van de Lagrangiaan kunnen we natuurlijk ook direkt relateren aan de variaties (3.3.39) en (3.3.40):

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t \quad , \quad (3.3.42)$$

waarin de variatie van de snelheid is gedefinieerd door $\delta \dot{q} = d\delta q/dt$. Met een partiële integratie is (3.3.42) te schrijven als

$$\delta L = \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right) + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t \quad . \quad (3.3.43)$$

De eerste term valt weg wegens de Lagrange-vergelijkingen. De derde term kan herschreven worden met (3.3.9). Dan ontstaat

$$\delta L = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q - H \delta t \right) \quad , \quad (3.3.44)$$

waarbij we hebben aangenomen dat δt niet afhangt van de tijd. (Het bewijs kan gegeneraliseerd worden voor het geval $\delta t(t)$, maar dit is niet van belang voor de toepassingen die we hier beschouwen.)

We beschikken nu over twee uitdrukkingen (3.3.41) en (3.3.44) voor δL . De laatste bevat in essentie niet meer dan de bewegingsvergelijkingen. De eerste doet een uitspraak over de symmetrie van de Lagrangiaan. De conclusie is dat de covariantie van de Lagrangiaan onder een gegeven transformatie de behoudswet

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q - H \delta t - \delta \Lambda \right) = 0 \quad (3.3.45)$$

tot gevolg heeft. Dit is de stelling van Noether.

Opgave 39 *Ga zelf na dat de eerder behandelde behoudswetten inderdaad bijzondere gevallen van deze stelling zijn.*

Continue symmetrietransformaties vormen vrijwel altijd een Lie groep (Marius Sophus Lie, 1842-1899, noors wiskundige). Dan is de Lagrangiaan invariant, of covariant, onder transformaties die afhangen van een eindig aantal groepsparameters ε_a , $a = 1, 2, \dots, p$, waarbij p de dimensie van de groep is. Bijvoorbeeld de verplaatsing τ parametrizeert de 1-parameter groep van tijd translaties; de verplaatsing $\mathbf{d}$ de 3-parameter-groep van ruimtetranslaties; de draaihoek en as $\theta \mathbf{n}$ de 3-parameter groep van rotaties; de snelheid $\mathbf{u}$ de 3-parameter groep van Galileitransformaties. Tesamen vormen deze transformaties de Galilei-groep gekarakteriseerd door tien groepsparameters $\{\varepsilon_a\} = \{\tau, \mathbf{d}, \theta \mathbf{n}, \mathbf{u}\}$.

Het eenheidselement van de groep wordt gekarakteriseerd door $\varepsilon_a = 0$. Voor een infinitesimale transformatie kunnen we schrijven

$$\delta t = \frac{\partial \delta t}{\partial \varepsilon_a} \varepsilon_a = \varepsilon_a \delta_a t \quad , \quad (3.3.46)$$

$$\delta q = \frac{\partial \delta q}{\partial \varepsilon_a} \varepsilon_a = \varepsilon_a \delta_a q \quad , \quad (3.3.47)$$

$$\delta \Lambda = \frac{\partial \delta \Lambda}{\partial \varepsilon_a} \varepsilon_a = \varepsilon_a \delta_a \Lambda \quad , \quad (3.3.48)$$

waarbij de variatie δ_a steeds gedefinieerd wordt door het tweede lid, en we de sommatieconventie gebruiken.

Opgave 40 *Bepaal de variaties $\delta_a t$, $\delta_a q$, en $\delta_a \Lambda$ voor de Galilei-groep.*

Met deze definities kunnen we de behoudswet (3.3.45) herschrijven als

$$\frac{d}{dt} Q_a = 0 \quad , \quad (3.3.49)$$

met

$$Q_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta_a q - H \delta_a t - \delta_a \Lambda \quad . \quad (3.3.50)$$

Deze vergelijkingen laten zien dat met iedere parameter ε_a van een symmetrie groep, een (additieve) behouden grootheid $Q_a(q, \dot{q}, t)$ geassocieerd is die men wel

de Noether-lading noemt. De achtergrond voor deze naamgeving is dat in de quantummechanica ook elektrische lading (en op dezelfde manier, baryon lading etc.) geassocieerd is met een bepaalde symmetrie die in dit geval intrinsiek is, namelijk ijk-invariantie. Voor de Galilei-groep hebben we hierboven bewezen dat de set van Noether-ladingen gegeven wordt door $\{Q_a\} = \{H, \mathbf{P}, \mathbf{J}, \mathbf{K}\}$.

Symmetriebeschouwingen spelen een centrale rol in de moderne natuurkunde. Bij het ontwikkelen van nieuwe theorieën gaat men veelal op zoek naar een Lagrangiaan om zo de bewegingsvergelijkingen te vinden. De Lagrangiaan is gewoonlijk een eenvoudige funktie van de relevante variabelen. Vaak is het zo dat de eenvoudigste Lagrangiaan die zich verdraagt met de opgelegde symmetrieën (zoals Galilei-invariantie of Lorentz-invariantie), ook de juiste blijkt te zijn. Dit is de niet te onderschatten kracht van het Lagrange-formalisme.

Opgave 41 *Beredeneer dat de standaard Lagrangiaan (3.1.6) van de klassieke mechanica de eenvoudigste funktie is verenigbaar met Galilei-invariantie.*

Hoofdstuk 4

Hamilton Formalisme

Il n'est pas sûr que la Nature soit simple. Pouvons-nous sans dangers faire comme si elle l'était?

Henri Poincaré
1854-1912

4.1 Vergelijkingen van Hamilton

4.1.1 Hamiltoniaan

In de afleiding van de Noetherstelling voor de behouden grootheden spelen twee functies van de gegeneraliseerde coördinaten en snelheden een belangrijke rol. De eerste is de gegeneraliseerde impuls $\pi = \{\pi_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, met componenten gedefinieerd volgens

$$\pi_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad . \quad (4.1.1)$$

De tweede is de Hamiltonfunctie

$$H = \sum_i \pi_i \dot{q}_i - L \quad . \quad (4.1.2)$$

Deze twee functies worden gegenereerd door de ruimte- en tijdtranslaties. Maar ook het omgekeerde is het geval: de Hamiltonfunctie is tevens de generator van de verplaatsingen van het systeem in de tijd. Evenzo genereert de impuls de verplaatsingen in de ruimte. Dit inzicht komt voort uit het Hamilton-formalisme, dat we hieronder zullen bespreken.

Het Hamiltonformalisme geeft een nieuwe formulering van de wetten van de mechanica die een belangrijke rol spelen in de theoretische natuurkunde. De statistische mechanica, d.w.z. de mechanica van veel-deeltjes-systemen, is erop gebaseerd. Nog belangrijker, het Hamiltonformalisme is het uitgangspunt voor de generalisatie naar de quantummechanica. Het begrip Hamiltoniaan staat hierin centraal.

We beschouwen eerst de gegeneraliseerde impuls die i.h.a. een functie is van de gegeneraliseerde coördinaten $q = \{q_i\}$, en snelheden $\dot{q} = \{\dot{q}_i\}$, en eventueel de tijd:

$$\pi_i = \pi_i(q, \dot{q}, t) \quad . \quad (4.1.3)$$

Men kan zich afvragen of het mogelijk is ook omgekeerd de gegeneraliseerde snelheden uit te drukken in de gegeneraliseerde impulsen

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(q, \pi, t) \quad . \quad (4.1.4)$$

Daartoe moet het systeem vergelijkingen (4.1.1) inverteerbaar zijn. De noodzakelijke en voldoende voorwaarde hiervoor is dat de Jacobiaan regulier is:

$$\det \frac{\partial \pi_i}{\partial \dot{q}_j} = \det \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \neq 0 \quad . \quad (4.1.5)$$

We herkennen hierin de voorwaarde (3.1.34) dat de Lagrangiaan niet singulier is. Dit is ook de voorwaarde dat de Lagrange-vergelijkingen integreerbaar zijn. Als de Lagrangiaan singulier is, kan de gegeneraliseerde impuls niet langs deze weg geconstrueerd worden. Dit is een probleem dat zich voordoet in de theorie van het Maxwell-veld, en men moet daar een afwijkende procedure volgen. Dit kunnen we hier niet verder bespreken.

In het geval van een reguliere Lagrangiaan kunnen we dus in principe de snelheden uitdrukken in gegeneraliseerde impulsen. In het bijzonder kunnen we m.b.v. (4.1.4) uit de Lagrangiaan, en daarmee ook uit de Hamiltonfunctie, de snelheden elimineren:

$$H(q, \pi, t) = \sum_i \pi_i \dot{q}_i(q, \pi, t) - L(q, \dot{q}(q, \pi, t), t) \quad . \quad (4.1.6)$$

Deze nieuwe functie heet de *Hamiltoniaan*. Het is een onderdeel van de definitie van de Hamiltoniaan dat deze dynamische functie altijd beschouwd wordt als functie van q en π . Dit is niet een willekeurig voorschrift maar een gevolg van het feit dat de transformatie (4.1.6) van een Lagrangiaan L met coördinaten q en snelheden $\dot{q}$, naar een Hamiltoniaan H met coördinaten q en impulsen π , een voorbeeld is van een Legendre-transformatie.

Opgave 42 *Construeer de gegeneraliseerde impuls en de Hamiltoniaan voor*

(a) *een deeltje in een conservatief krachtsveld*

$$\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}} \quad , \quad (4.1.7)$$

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r}) \quad , \quad (4.1.8)$$

(b) *een lading in een uitwendig elektromagnetisch veld*

$$\boldsymbol{\pi} = m\dot{\mathbf{r}} + e\mathbf{A} \quad , \quad (4.1.9)$$

$$H = \frac{(\boldsymbol{\pi} - e\mathbf{A})^2}{2m} + e\varphi \quad . \quad (4.1.10)$$

Hierin zijn φ en $\mathbf{A}$ de potentialen van het electromagnetische veld.

4.1.2 Legendre Transformatie

De Legendre-transformatie, genoemd naar de franse wiskundige Adrien-Marie Legendre (1752-1833), is een zeer algemene constructie die ook in andere gebieden van de natuurkunde, speciaal de thermodynamica, veelvuldig toepassing vindt. Beschouw een funktie $f(x, y)$ van twee variabelen met totale differentiaal

$$df = udx + vdy \quad , \quad (4.1.11)$$

met differentiaal-coëfficiënten

$$u = \frac{\partial f}{\partial x} \quad v = \frac{\partial f}{\partial y} \quad . \quad (4.1.12)$$

De Legendre-transformatie is een transformatie van de onafhankelijke variabelen (x, y) naar (u, y) , maar zodanig dat nu x en v gegeven worden door differentiaal-relaties van de vorm (4.1.12). Daartoe bekijken we de funktie

$$g = f - ux \quad . \quad (4.1.13)$$

De totale differentiaal hiervan is

$$dg = df - udx - xdu \quad , \quad (4.1.14)$$

of met (4.1.11)

$$dg = vdy - xdu \quad . \quad (4.1.15)$$

Inderdaad worden dus de variabelen x en v gegeven door de differentiaal-quotiënten

$$x = -\frac{\partial g}{\partial u} \quad , \quad v = \frac{\partial g}{\partial y} \quad . \quad (4.1.16)$$

Deze relaties zijn complementair met de relaties (4.1.12), in de zin dat de rol van x en u verwisseld is. Dus de funktie g , zoals gedefinieerd in (4.1.13), met in de tweede term het produkt van oude en nieuwe variabelen, is een natuurlijke funktie van de variabele $u = \partial f / \partial x$.

Opgave 43 *Ga na dat (4.1.6) een Legendre-transformatie is.*

4.1.3 Kanonieke Vergelijkingen

Het cruciale verschil tussen het Hamilton-formalisme en het Lagrange-formalisme is dat H een natuurlijke funktie van q en π is, waar L dat is van q en $\dot{q}$. De transformatie $(q, \dot{q}) \rightarrow (q, \pi)$ is echter niets anders dan een speciale coördinaten-transformatie. Alle dynamische informatie die bevat is in $L(q, \dot{q}, t)$ zal dus ook bevat zijn in $H(q, \pi, t)$. I.h.b. betreft dit de bewegingsvergelijkingen die we nu zullen afleiden. We bekijken daartoe de totale differentiaal van $H(q, \pi, t)$:

$$dH = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial \pi_i} d\pi_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt \quad . \quad (4.1.17)$$

Anderzijds kunnen we ook de differentiaal nemen van de vergelijking (4.1.6) die H definieert:

$$dH = \sum_i \left(-\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \dot{q}_i d\pi_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad . \quad (4.1.18)$$

Omdat we te maken hebben met een Legendre-transformatie, vallen de termen met $d\dot{q}_i$ precies tegen elkaar weg.

Aangezien de twee uitdrukkingen (4.1.17) en (4.1.18) aan elkaar gelijk moeten zijn, geldt kennelijk

$$\begin{aligned} -\sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) dq_i &+ \sum_i \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial \pi_i} \right) d\pi_i \\ &- \left(\frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial t} \right) dt = 0 \quad . \end{aligned} \quad (4.1.19)$$

Voor een niet-singuliere Lagrangiaan zijn coördinaten en impulsen onafhankelijk; dus kunnen we concluderen

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial \pi_i} \quad , \quad \dot{\pi}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad , \quad (4.1.20)$$

waarbij we nog eens de Lagrange-vergelijkingen hebben gebruikt om $\partial L / \partial q_i$ te vervangen door $\dot{\pi}_i$. Het paar vergelijkingen (4.1.20) staat bekend als de Hamilton-vergelijkingen. Verder geldt ook

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t} \quad . \quad (4.1.21)$$

De Hamilton-vergelijkingen worden wel “kanoniek” genoemd, hetgeen hier zoveel betekent als “natuurlijk”. Ook verwijst kanoniek naar het feit dat de Hamilton-vergelijkingen onafhankelijk zijn van de gekozen dynamische variabelen q en π . Dit is een direct gevolg van de coördinaat-invariantie van de Lagrangiaan.

Opgave 44 *Laat zien dat geldt*

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad . \quad (4.1.22)$$

Ga na onder welke voorwaarden H gelijk is aan de totale energie.

Opgave 45 *Gegeven is een Hamiltoniaan $H(q, \pi, t)$. Definieer de inverse Legendre-transformatie naar de corresponderende Lagrangiaan $L(q, \dot{q}, t)$.*

Gesteld dat de Lagrangiaan van de tweede orde in $\dot{q}$ is, zal de Hamiltoniaan dat zijn in $\dot{\pi}$. De Hamilton-vergelijkingen zijn dan eerste-orde differentiaal-vergelijkingen met unieke oplossingen $q_i(t)$ en $\pi_i(t)$, gegeven de beginwaarden $q_i(0)$, $\pi_i(0)$ op een begintijdstip $t = 0$. Daar we veronderstellen dat $(q, \dot{q}) \rightarrow (q, \pi)$ een coördinatentransformatie is, bepalen de oplossingen van de Hamilton-vergelijkingen tevens de oplossingen van

de Lagrange-vergelijkingen. Omgekeerd, voor een gegeven H bestaat er altijd een equivalente Lagrangiaan L , mits voldaan is aan

$$\det \frac{\partial^2 H}{\partial \pi_i \partial \pi_j} \neq 0 \quad , \quad (4.1.23)$$

hetgeen een conditie op H is analoog aan (4.1.5).

Opgave 46 *Stel dat de Lagrangiaan niet afhangt van een bepaalde coördinaat q_j . (Men zegt dat q_j een cyclische coördinaat is.) Bewijs dan:*

- (a) *dat ook H niet afhangt van q_j ;*
- (b) *dat de geconjugeerde impuls π_j behouden is;*
- (c) *dat de totale impuls behouden is als de zwaartepuntscoördinaat cyclisch is.*

4.1.4 Faseruimte

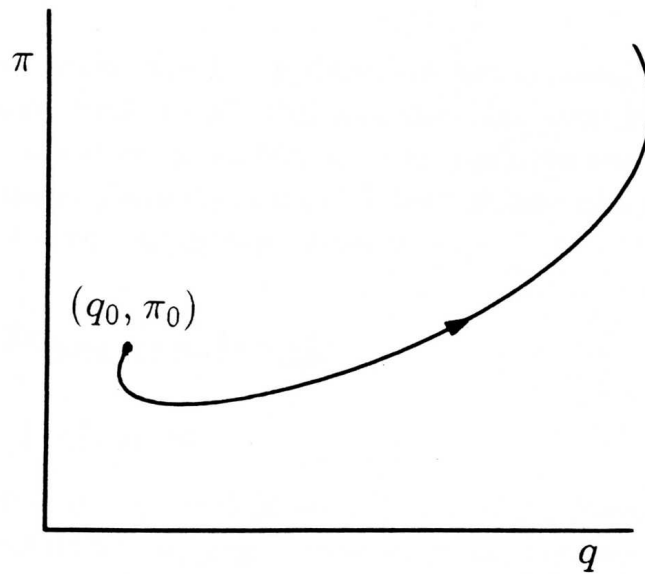
De vorm van de Hamilton-vergelijkingen komt al voor in het werk van Lagrange en Poisson (1809). Maar het was Hamilton die als eerste in zijn artikel “On a general method in dynamics” van 1834, de nieuwe mogelijkheden van het formalisme wist aan te geven. Het essentiële kenmerk van het Hamilton-formalisme is het onafhankelijke karakter van de kanonieke variabelen q en π . A priori is hiertussen geen verband gegeven, in tegenstelling tot de variabelen q en $\dot{q}$ die op ieder moment verbonden zijn door de tijdafgeleide $\dot{q} = dq/dt$. De essentie van het Hamilton-formalisme is de verdubbeling van het aantal onafhankelijke variabelen, met als gevolg een verdubbeling van het aantal bewegingsvergelijkingen. Maar deze bewegingsvergelijkingen zijn nu eerste-orde differentiaal-vergelijkingen in tijd, en niet tweede-orde zoals in het Lagrange-formalisme. Het vinden van het verband tussen q en π is daardoor een onderdeel van het probleem om de bewegingsvergelijkingen op te lossen.

Om het verschil tussen het Lagrange- en Hamilton-formalisme nader te illustreren, introduceren we, in navolging van Hamilton, het begrip faseruimte (engels: *phase space*). Dit is een denkbeeldige ruimte, met $2n$ dimensies voor een systeem met n vrijheidsgraden, opgespannen door de coördinaten q en de impulsen π . De “fase” van een Hamilton-systeem op een gegeven tijdstip wordt gegeven door de numerieke waarde van de $2n$ variabelen $(q, \pi) = \{q_i, \pi_i\}$, en gerepresenteerd door een uniek punt in de faseruimte.

Gegeven een beginpunt $(q_0, \pi_0) = \{q_i(0), \pi_i(0)\}$ op tijdstip $t = 0$, volgt het fasepunt een unieke baan in de faseruimte corresponderend met de oplossing van de Hamilton-vergelijkingen (4.1.20). Als het systeem conservatief is met energie E geldt $H(q, p) = E$. Door deze vergelijking wordt een $2n - 1$ dimensionaal oppervlak in de faseruimte beschreven. Voor gegeven energie E moet de baan van het systeem op dit fase-oppervlak liggen.

Opgave 47 *Beschouw de één-dimensionale oscillator met Hamiltoniaan*

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} \quad (4.1.24)$$



Figuur 4.1: Fasebaan van een mechanisch systeem in de faseruimte.

- (a) *Geef de bewegingsvergelijkingen.*
- (b) *Schets het fase-oppervlak $H(q, p) = E$ in de faseruimte van het systeem.*

In principe wordt ieder Hamiltons systeem, hoe complex ook, beschreven door een unieke fasebaan. Als we echter denken aan een gasvolume met daarin $\sim 10^{23}$ deeltjes, of een melkwegstelsel in het heelal, dan is het natuurlijk onmogelijk om een analytische oplossing te vinden. Men kan echter wel globale uitspraken doen over het gedrag van het systeem. Dit is het terrein van de “statistische mechanica”. Ook kan men voor systemen van 100-1000 deeltjes de fasebaan numeriek berekenen m.b.v. krachtige rekenmachines. Deze methode van de “moleculaire dynamica” levert belangrijke informatie over het gedrag van realistische veel-deeltjes systemen.

4.2 Poisson-haak

4.2.1 Definitie

We beschouwen een willekeurige dynamische grootheid $A(q, \pi)$, d.w.z. een of andere functie van de gegeneraliseerde coördinaten en impulsen. De Hamiltoniaan is een voorbeeld van een dynamische functie, en zo ook de totale impuls en het impulsmoment. Daar de coördinaten en impulsen functies van de tijd zijn, geldt dat

$$A(t) = A(q(t), \pi(t)) \quad , \quad (4.2.1)$$

een impliciete functie van de tijd is. We nemen nu de totale tijdafgeleide van deze grootheid

$$\frac{dA}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial A}{\partial \pi_i} \dot{\pi}_i \right) \quad . \quad (4.2.2)$$

Met de Hamilton-vergelijkingen (4.1.20) wordt dit

$$\frac{dA}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial \pi_i} - \frac{\partial A}{\partial \pi_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = \{A, H\} \quad . \quad (4.2.3)$$

De *Poisson-haak* van A met H in derde lid, door Poisson al in 1809 ingevoerd, is een afkorting voor het verschil van differentiaalcoëfficiënten in het tweede lid. Algemeen luidt de definitie van de Poisson-haak (engels: *Poisson bracket*) voor twee willekeurige dynamische grootheden A en B :

$$\{A, B\} = \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial \pi_i} - \frac{\partial A}{\partial \pi_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right) \quad . \quad (4.2.4)$$

Opgave 48 *Laat zien dat de Poisson-haak*

(a) *antisymmetrisch is*

$$\{A, B\} = -\{B, A\} \quad (4.2.5)$$

(b) *lineair is*

$$\{\lambda A + \mu B, C\} = \lambda \{A, C\} + \mu \{B, C\} \quad ; \quad (4.2.6)$$

(c) *voldoet aan de Jacobi-identiteit*

$$\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0 \quad . \quad (4.2.7)$$

Op grond van deze drie eigenschappen is de Poisson-haak een voorbeeld van een “Lie-haak”.

We zien dus in (4.2.3) dat de Hamiltoniaan, via de Poisson-haak, de tijdevolutie van een willekeurige dynamische grootheid A bepaalt. Men zegt dat H de *generator* is van de tijdtranslaties.

Een corollarium van deze stelling is het volgende. Als de Poisson-haak $\{A, H\}$ nul is, dan is de betreffende grootheid behouden. Anders gezegd: het criterium voor het behouden zijn van een bepaalde grootheid Q_a , die niet expliciet afhangt van de tijd, is dat de Poisson-haak met H nul is

$$\{Q_a, H\} = 0 \quad . \quad (4.2.8)$$

Deze stelling is equivalent met de eerder gegeven criteria voor de behouden grootheden in 3.3.

Verder kan men eenvoudig inzien dat geldt:

$$\frac{\partial}{\partial q_i} A = \{A, \pi_i\} \quad . \quad (4.2.9)$$

Op grond van deze vergelijking merkt men π_i aan als de generator van de verplaatsingen in de coördinaat q_i .

Opgave 49 *Bewijs dat de coördinaten en impulsen voldoen aan de “fundamentele” Poisson-haken*

$$\begin{aligned}\{q_i, q_j\} &= 0 \quad , \\ \{\pi_i, \pi_j\} &= 0 \quad , \\ \{q_i, \pi_j\} &= \delta_{ij} \quad .\end{aligned}\tag{4.2.10}$$

Paren van variabelen die aan deze set relaties voldoen heten kanoniek geconjugeerd.

Opgave 50 *Laat zien dat de vergelijkingen*

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= \{q_i, H\} \quad , \\ \dot{\pi}_i &= \{\pi_i, H\}\end{aligned}\tag{4.2.11}$$

equivalent zijn met de Hamilton-vergelijkingen.

4.2.2 Galilei-groep

Voor de geïnteresseerde lezer vermelden we nog dat de tien behouden grootheden $Q_a = \{H, \mathbf{P}, \mathbf{J}, \mathbf{K}\}$ voor een gesloten mechanisch systeem voldoen aan de volgende set van Poisson-haken die karakteristiek is voor de Galilei-groep:

$$\begin{aligned}\{P_i, H\} &= 0 \quad \{J_i, H\} = 0 \quad , \\ \{P_i, P_j\} &= 0 \quad \{K_i, K_j\} = 0 \quad , \\ \{J_i, J_j\} &= \varepsilon_{ijk} J_k \quad \{J_i, P_j\} = \varepsilon_{ijk} P_k \quad \{J_i, K_j\} = \varepsilon_{ijk} K_k \quad , \\ \{K_i, H\} &= P_i \quad \{K_i, P_j\} = \delta_{ij} M \quad .\end{aligned}\tag{4.2.12}$$

Men kan deze relaties bewijzen door gebruik te maken van de fundamentele Poisson-haken (4.2.10). Men kan echter ook algemener als volgt redeneren. Aangezien $\mathbf{P}$ en $\mathbf{J}$ behouden zijn, is hun Poisson-haak met H gelijk aan nul. Verder zijn translaties en Galilei boosts in verschillende richtingen onafhankelijk, vandaar dat de Poisson-haken in regel twee ook gelijk zijn aan nul. Het impulsmoment is de generator van de groep van ruimtelijke rotaties $SO(3)$. De eerste Poisson-haak in regel drie is de Poisson-haak-realisatie van de onderliggende Lie algebra $SO(3)$. De twee andere geven uitdrukking aan het feit dat zowel $\mathbf{P}$ als $\mathbf{K}$ vectoren zijn onder rotaties. Tenslotte zijn de laatste twee Poisson-haken het direkt gevolg van het gedrag van H en $\mathbf{P}$ onder Galilei-transformaties.

Opgave 51 *Ga na dat ook $\mathbf{K}$ een behouden grootheid is.*

De tien behouden grootheden genereren de infinitesimale Galilei-transformaties. Neem als voorbeeld een infinitesimale tijdtranslatie $t \rightarrow t + \varepsilon$. De corresponderende variatie $\delta A = A(t + \varepsilon) - A(t)$ van een willekeurige dynamische grootheid A wordt volgens (4.2.3) door

$$\delta A = -\varepsilon \{H, A\} \quad .\tag{4.2.13}$$

Op dezelfde wijze is in te zien dat een infinitesimale ruimtetranslatie $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \boldsymbol{\varepsilon}$ aanleiding geeft tot

$$\delta A = -\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \{\mathbf{P}, A\} \quad . \quad (4.2.14)$$

De algemene formule is

$$\delta A = -\varepsilon_a \{Q_a, A\} \quad . \quad (4.2.15)$$

Op grond hiervan worden de behouden ladingen Q_a de *generatoren* van de Galilei-groep genoemd. Dus een symmetrie geeft aanleiding tot een behouden grootte die op zijn beurt weer de corresponderende coördinaten-transformatie genereert via (4.2.15).

Meestal wordt het begrip Lie-algebra direkt geassocieerd met de commutator-algebra in de quantummechanica. Bijvoorbeeld de draaiimpuls-operator $\mathbf{J} = -i\hbar \mathbf{r} \wedge \nabla$ voldoet aan de commutatierelatie

$$[J_i, J_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} J_k \quad , \quad (4.2.16)$$

waarin $[,]$ de commutatorhaak is. Het mag duidelijk zijn dat Lie-algebra's niet intrinsiek quantummechanisch zijn, en dat zowel de Poisson-haak, als de commutatorhaak, beide realisaties van het abstracte begrip "Lie-haak" zijn; zie Opgave 48. De essentiële elementen zijn de Hamilton-formulering, en het bestaan van een groep van symmetrietransformaties.

De formele equivalentie van de Poisson-haak met de commutatorhaak speelt een essentiële rol in kanonieke quantisatie van een klassiek systeem. Volgens dit voorschrift worden de klassieke kanonieke variabelen q en π vervangen door operatoren $\hat{q}$ en $\hat{\pi}$ in een Hilbert-ruimte, en de Poisson-algebra door een commutatoralgebra via de substitutie

$$\{A, B\} \rightarrow \frac{1}{i\hbar} [\hat{A}, \hat{B}] \quad . \quad (4.2.17)$$

De eerste Poisson-bracket van formule (4.2.12) regel drie gaat dan inderdaad over in de draaiimpuls commutatierelatie (4.2.16); de fundamentele Poisson-haakjes (4.2.10) gaan over in de kanonieke quantisatiecondities.

De rechtvaardiging voor deze procedure is, dat hierdoor de Galilei-symmetrie van de theorie gewaarborgd wordt. Zo gezien wordt kanonieke quantisatie opgelegd door de voorwaarde van Galilei-invariantie. Wat we hiermee gezegd willen hebben is dat symmetrieën en behoudswetten voor een belangrijk deel de structuur van een fysische theorie bepalen. Dit was al het geval voor de Newton-vergelijkingen, maar dit geldt in versterkte mate voor het Lagrange- en Hamilton-formalisme, zowel als voor de quantummechanica die hieruit voortkomt.