

SPECIALE

RELATIVITEITSTHEORIE

Ch.G. van Weert
Instituut voor Theoretische Fysica
Valckenierstraat 65
1018 XE Amsterdam

COLLEGEJAAR 1995/1996

Inhoudsopgave

1	Relativiteitsprincipe	6
1.1	Referentiestelsel	6
1.2	Inertiaalstelsel	8
1.3	Relativiteitsprincipe van Galilei	10
1.4	Michelson en Morley experiment	13
1.5	Gelijktijdigheid	14
2	Lorentztransformatie	19
2.1	Tijdvertraging	19
2.2	Lengteverkorting	22
2.3	Minkowski-diagram	23
2.4	Ruimte-tijd afstand	26
2.5	Transformatie-formules	29
2.6	Optelwet voor snelheden	32
3	Relativistische Mechanica	35
3.1	Eigentijd	35
3.2	Viersnelheid	37
3.3	Vierimpuls	39
3.4	Energie en massa	42
3.5	Toepassingen	45
3.5.1	Drempelenergie	45
3.5.2	Comptonverstrooiing	46
3.5.3	Dopplerverschuiving	47

Literatuur

1. D.J. Griffiths
Introduction to Electrodynamics
(Prentice Hall, 1989)
2. J.B. Marion en S.T. Thornton
Classical Dynamics of Particles and Systems
(Harcourt Brace Jovanovich, 1988)
3. E.F. Taylor, en J.A. Wheeler
Spacetime Physics
(Freeman, 1963)
4. R. D’Inverno
Introducing Einstein’s Relativity
(Clarendon Press, 1992)
5. A. Einstein
Relativity
(Methuen, 1960)
6. A. Einstein, H.A. Lorentz, H. Weyl en H. Minkowski
The Principle of Relativity
a collection of original memoirs
(Dover publications, 1958)
7. A. Pais
‘Subtle is the Lord...’
the science and life of Albert Einstein
(Clarendon Press, 1982)

Inleiding

Het lijkt me dat u de waarde van formele gezichtspunten hogelijk overschat. Deze zijn nuttig als een al geaccepteerde waarheid in definitieve vorm geformuleerd moet worden, maar schieten bijna altijd tekort als heuristisch hulpmiddel.

Albert Einstein
aan Felix Klein, 1917

In 1905 werd de wetenschap verrijkt met de publikatie van Albert Einstein's artikel "Zur Elektrodynamik bewegter Körper", met belangrijke consequenties voor onze inzichten omtrent ruimte en tijd. Dit is de relativiteitstheorie die door Einstein "speciaal" werd genoemd om onderscheid te maken met zijn algemene relativiteitstheorie van 1916 die ook de zwaartekracht omvat. De basis voor de theorie is het "relativiteitsprincipe" zoals dat door Henri Poincaré (1854-1912) en Albert Einstein (1879-1955) in het begin van deze eeuw werd geformuleerd. Dit principe ontkent het bestaan van absolute ruimte en postuleert dat de snelheid van het licht, en van andere elektromagnetische straling, altijd dezelfde is, onafhankelijk van de waarnemer en van de bron. Daarmee werd het negatieve resultaat van het Michelson-Morley experiment (1887), dat probeerde de snelheid van de aarde t.o.v. de vaste "ether" te meten, de hoeksteen van de relativiteitstheorie. Tevens kreeg hierdoor het mechanische relativiteitsprincipe van Galilei (1564-1642) en Huygens (1629-1695) betekenis voor de gehele fysica.

Hoewel aan Einstein de eer toekomt de grondslagen van de relativiteitstheorie gelegd te hebben, zijn toch ook bijdragen van een aantal anderen, zoals de al genoemde Henri Poincaré en Hendrik Anton Lorentz (1853-1928), van belang. In 1892 kwam Lorentz met de veronderstelling, onafhankelijk van hem ook al in 1889 geopperd door George Francis Fitzgerald, dat materiële lichamen een lengteverkortening ondervinden in de richting van hun snelheid. Dit was de Fitzgerald-Lorentz contractie-hypothese die een verklaring moest geven voor het nul-resultaat van het Michelson-Morley experiment van 1887. In 1904 deed Lorentz een poging hiervoor een theoretisch kader te geven op basis van een elektromagnetisch atomistisch model. In zijn artikel worden de Lorentz-transformatieformules voor ruimte en tijd gegeven en ook die voor het elektrische- en magnetische veld. Poincaré was evenals Lorentz de mening toegedaan dat het relativiteitsprincipe op een of andere wijze een verklaring nodig had, echter zonder dat hij hiervoor een concrete theorie kon geven. Van Poincaré is benaming "Lorentz-transformatieäffkomstig", en deze kon in 1905 ook laten zien dat de Lorentz-transformaties een groep vormen die de Maxwell-vergelijkingen invariant laat.

Naar we mogen aannemen was Einstein in 1905 niet bekend met het werk van Lorentz uit 1904, noch met dat van Poincaré uit 1905. Ook is het niet zo dat het werk van Einstein onmiddellijk erkend werd als een doorbraak. Planck was in 1906 de eerste die de relativiteitstheorie serieus nam en ook de eerste die het verband tussen snelheid en impuls wist te geven. Een zeer belangrijke bijdrage was de lezing

“Ruimte en Tijd” die Hermann Minkowski (1864-1909) een jaar voor zijn dood in Keulen gaf voor een genootschap van Duitse geleerden en medici. Daarin ontvouwde hij het denkbeeld dat ruimte en tijd niet bestaan als afzonderlijke grootheden maar als één geheel. Later publiceerde hij ook de moderne vector-formulering van de relativiteitstheorie die een grote formele vereenvoudiging betekende. Begrippen als wereldlijn, ruimte- en tijdachtige vectoren, en lichtkegel zijn van hem afkomstig.

Na 1908 groeide de bekendheid van de relativiteitstheorie snel, hoewel niet alle oudere tijdgenoten van Einstein daarmee even gelukkig waren. In de Einstein-biografie “Subtle is the Lord...”, van de hand van Abraham Pais [7], kan men lezen dat Poincaré de relativiteitstheorie nooit geaccepteerd heeft en ook Lorentz niet echt een overtuigd relativist werd. In dit boek wordt tevens een boeiende schets gegeven van het fysische wereldbeeld van vóór 1900 en hoe Einstein dat veranderd heeft.

Er bestaan vele uitstekende leerboeken [1-5] waarin de relativiteitstheorie wordt uiteengezet, waaronder een semi-populair boek van Einstein zelf. Dit dictaat pretendeert niet meer te zijn dan een samenvatting van de belangrijkste begrippen en formules, met meer nadruk op de fysische inhoud dan de formele aspecten. Hoewel Einstein zeer gevoelig was voor wiskundige elegantie en eenvoud schreef hij toch in 1917 aan Felix Klein de hierboven aangehaalde waarschuwing [Pais, p 325].

Hoofdstuk 1

Relativiteitsprincipe

According to the principle of relativity, the laws of physical phenomena must be the same for a stationary observer as for an observer carried along in a uniform motion of translation; so that we have not and can not have any means of discerning whether or not we are carried along in such a motion.

Jules Henri Poincaré
1854-1912

1.1 Referentiestelsel

In de relativiteitstheorie speelt het begrip referentiestelsel (engels: *reference frame*) een voorname rol. Hieronder wordt verstaan een waarnemer die beschikt over een ruimtelijk coördinatenstelsel, dat hem in staat stelt afstanden te meten, en een klok waarop hij de tijd kan aflezen. We zullen ons beperken tot rechthoekige carthesische assenstelsels. De drie ruimtelijke coördinaten die hierdoor worden vastgelegd zullen we in het vervolg aangeven met de notaties

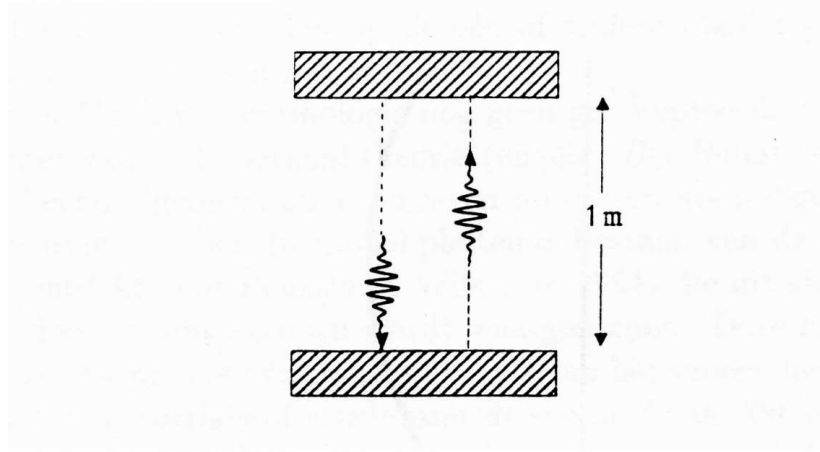
$$\mathbf{x} = \{x^i\} = (x^1, x^2, x^3) = (x, y, z) \quad . \quad (1.1.1)$$

Voor de ruimtelijke indices gebruiken we de letters $i, j, k, \dots$ die de waarden 1, 2, 3 kunnen aannemen. De afstand tussen twee naburige punten wordt gegeven door

$$\Delta s^2 = \Delta \mathbf{x} \cdot \Delta \mathbf{x} = \Delta x^i \Delta x^i \quad . \quad (1.1.2)$$

In het laatste lid wordt gesommeerd over het paar herhaalde indices (Einstein sommatie conventie). Dergelijke indices worden “dummieindices genoemd. Een index waarover niet gesommeerd wordt heet een vrije index.

We spreken ook af dat afstand zowel als tijd wordt gemeten in meters. Voor de tijdmeting gebruiken we een lichtklok die bestaat uit twee spiegels parallel gemontereerd op een afstand van precies 1 meter. Tussen de spiegels kan een lichtstraal heen en weer kaatsen. Tussen twee kaatsingen legt het licht een afstand van één meter af. Dit is de eenheid van tijd die we de lichtmeter noemen. Aangezien de lichtsnelheid



Figuur 1.1: Lichtklok

c gelijk is aan 3×10^8 m/sec staat deze eenheid gelijk aan $3,3 \times 10^{-9}$ sec, dus 3,3 nanoseconde. We nemen aan dat iedere andere klok op deze wijze gekalibreerd is ongeacht zijn constructie.

Het verband tussen de tijd t^* gemeten in lichtmeters en de tijd gemeten in seconden is eenvoudig $t^* = ct$. De corresponderende snelheid $v^* = v/c$ is dimensieloos met waarden $0 \leq v^* \leq 1$. Uitgedrukt in deze tijdseenheid heeft de lichtsnelheid c^* de numerieke waarde één.

De tijd wordt in de relativiteitstheorie beschouwd als de vierde dimensie van de ruimte-tijd M . Een punt van deze $4D$ ruimte M heeft de ruimte-tijd coördinaten

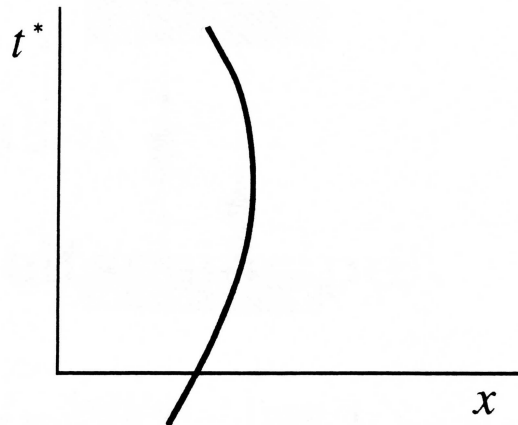
$$\{x^\mu\} = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, \mathbf{x}) \quad . \quad (1.1.3)$$

De Lorentz-index μ doorloopt de waarden 0, 1, 2, en 3, waarbij $\mu = 0$ correspondeert met de tijd-coördinaat $x^0 = t^* = ct$, en $\mu = 1, 2, 3$ met de ruimte-coördinaten. Een ruimte-tijdpunt $\{x^\mu\}$ stelt een puntgebeurtenis voor op een scherp bepaalde tijd t en scherp bepaalde plaats $\mathbf{x}$. Ruimte-tijd is dus de verzameling van alle mogelijke puntgebeurtenissen.

Een referentiestelsel dat correspondeert met een inertiaalstelsel, wordt gewoonlijk een Lorentz-stelsel (engels: *Lorentz frame*) genoemd. In een Lorentzstelsel volgt een vrij test-deeltje een rechte lijn. We kunnen dit weergeven in een ruimte-tijd diagram waarin we de positie uitzetten tegen de tijd. Een lijn in een dergelijk diagram heet een *wereldlijn*. Het is gebruikelijk de tijd $t^* = ct$ vertikaal uit te zetten. De helling van een wereldlijn is dan omgekeerd evenredig met de snelheid van het deeltje (in eenheden c).

Opgave 1 *Schets in een 2D ruimte-tijd diagram de wereldlijn van:*

- (a) een deeltje in rust;
- (b) een foton;
- (c) een eenparig versneld deeltje.



Figuur 1.2: Wereldlijn van een testdeeltje

1.2 Inertiaalstelsel

Hierboven werd al gewag gemaakt van het begrip inertiaalstelsel (engels: *inertial frame*). Dit is per definitie een referentiestelsel waarin de eerste wet van Newton geldig is. Het is een coördinatenstelsel ten opzichte waarvan objecten die niet onderhevig zijn aan krachten in hun toestand van constante beweging of constante rust volharden.

Een versnelling ten opzichte van een rustend coördinatenstelsel is iets dat door waarneming kan worden aangetoond. Wanneer we in een trein zitten kunnen we met gesloten ogen zeggen wanneer deze gaat optrekken of afremmen. (We kunnen echter niet zeggen om welke van deze twee veranderingen het gaat, tenzij we weten of we voor of achteruit rijden). Volgens Newton bewees dit het bestaan van absolute ruimte. Zijn beroemde emmer-experiment had tot doel absolute rotatie experimenteel te bepalen door de kromming van het wateroppervlak in de emmer te meten.

De opvattingen van Newton werden bestreden door Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) die van mening was dat ruimte niets anders is dan het systeem van materiële dingen die ons omringen. In ieder geval is het experiment van Newton geen bewijs voor het bestaan van absolute beweging, want het resultaat kan ook nog op een andere wijze worden geïnterpreteerd. Dat het wateroppervlak hol gaat staan bij rotatie ligt misschien niet aan de absolute rotatie, maar aan de rotatie t.o.v. de 'vaste sterren', dat wil zeggen t.o.v. het overgrote deel van de materie ver weg in het heelal. Hierop werd al gewezen door de anglicaanse bisschop en filosoof George Berkeley (1685-1753) en die gedachte werd later overgenomen door de oostenrijkse natuurkundige en filosoof Ernst Mach (1838-1916). Volgens het principe van Mach

is alle versnelling relatieve versnelling. Een rustend coördinatenstelsel onderscheidt zich niet van andere stelsels doordat het absoluut geen versnelling ondergaat, maar doordat het niet wordt versneld t.o.v. het op de één of andere manier gedefinieerde gemiddelde van alle materie in het heelal.

In de tijd van Mach was cosmologie nog geen geaccepteerde natuurwetenschap. Nu echter wordt de oerknal-theorie (engels: *Big Bang*) voor het ontstaan van het heelal algemeen onderschreven door sterrenkundigen. Eén van sterkste argumenten die voor dit model pleiten is bestaan van de radioachtergrondstraling (ontdekt door Penzias en Wilson in 1964) die uit alle richtingen van het heelal door radiotelescopen wordt waargenomen. Deze radiostraling, die het bewijs moet zijn voor een veel hetere fase van het vroege heelal, is nagenoeg isotroop, mits gecorrigeerd wordt voor de snelheid van 800 km/sec waarmee het zonnestelsel t.o.v. deze achtergrond beweegt. Het coördinatenstelsel dat in rust is t.o.v. deze achtergrond zou wel eens het primaire inertiaalstelsel kunnen definiëren.

Hier raken we echter aan de algemene relativiteitstheorie waarin geen globale, maar slechts lokale inertiaalstelsels, gedefinieerd kunnen worden. Hoewel dit niet direct relevant is voor de speciale relativiteitstheorie zullen we dit toch kort bespreken. Als illustratie beschouwen we een referentiestelsel vast verbonden aan de aarde. Strikt genomen is dit geen inertiaalstelsel, zoals we weten, door de aanwezigheid van de zwaartekracht en de effecten van de rotatie van de aarde. Op veel experimenten zal dit echter nauwelijks van invloed zijn. Als we niettemin de zwaartekracht willen elimineren dan kunnen we ons voorstellen dat alle experimenten worden gedaan in een referentiestelsel dat vrij-vallend is in het zwaartekrachtsveld. In gedachte-experimenten gebruikt men vaak het beeld van een liftkooi in vrije val. In het referentiestelsel van de liftkooi is geen zwaartekracht voelbaar en vrije testdeeltjes bewegen t.o.v. de liftkooi eenparig.

Voor een homogeen tijdsonafhankelijk zwaartekrachtsveld is deze bewering eenvoudig te bewijzen. De bewegingsvergelijking voor een deeltje in dit veld luidt

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{g} \quad , \quad (1.2.1)$$

met $\mathbf{g}$ de valversnelling. We transformeren nu naar een vrijvallend coördinatenstelsel waarin de coördinaten $\mathbf{r}'$ van het deeltje gegeven worden door

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \frac{1}{2}\mathbf{g}(t - t_0)^2 \quad . \quad (1.2.2)$$

Hieruit volgt

$$\ddot{\mathbf{r}}' = \ddot{\mathbf{r}} - \mathbf{g} = 0 \quad , \quad (1.2.3)$$

hetgeen te bewijzen was. Dit verklaart dat in een ruimtecapsule in vrije val de astronauten in een toestand van gewichtloosheid zijn.

In het algemene geval van een inhomogeen en tijdsafhankelijk zwaartekrachtsveld met potentiaal $\Phi(t, \mathbf{x})$ kan de versnelling

$$\mathbf{g}(t, \mathbf{x}) = -\nabla\Phi(t, \mathbf{x}) \quad (1.2.4)$$

slechts in één punt weggetransformeerd worden. Afhankelijk van de mate van inhomogeniteit gegeven door

$$\nabla\mathbf{g}(t, \mathbf{x}) = -\nabla\nabla\Phi(t, \mathbf{x}) \quad , \quad (1.2.5)$$



Figuur 1.3: Liftkooi in vrije val

en de gewenste nauwkeurigheid kan er een omgeving gedefinieerd worden waarin de zwaartekracht afwezig is. Deze omgeving wordt een lokaal inertiaalstelsel genoemd. Merk op dat dit lokale inertiaalstelsel versneld beweegt t.o.v. een inertiaalstelsel verbonden met de vaste sterren. De gradiënt-uitdrukking in het rechter lid van (1.2.5) is een maat voor de inhomogeniteit van het zwaartekrachtsveld; men spreekt van getijdenkracht (engels: *tidal force*) omdat deze term aanleiding geeft tot eb en vloed.

De boven gegeven definitie van een lokaal inertiaalstelsel berust essentieel op het experimentele gegeven dat stoffelijke lichamen, ongeacht hun samenstelling, altijd dezelfde valversnelling ondervinden in een gegeven zwaartekrachtsveld. Als dit niet het geval was zou de waarnemer in de liftkooi een versnelling van deeltjes t.o.v. elkaar waarnemen. Dit equivalentie-principe was al bekend aan Galilei en Newton. Door de experimenten met een torsiebalans van Baron Roland von Eötvös (1848-1919) en later Dicke en Roll (1969) weten we dat de valversnellingen van aluminium en goud gelijk zijn met een nauwkeurigheid van 10^{-12} .

1.3 Relativiteitsprincipe van Galilei

De wetten van Newton worden geacht geldig te zijn in een willekeurig inertiaalstelsel. Dit is het relativiteitsprincipe van de klassieke mechanica dat ook een direct verband heeft met de dagelijkse ervaring. Immers versnelling is voelbaar, maar snelheid

niet. De snelheid van een vliegtuig dat rustig boven de aarde koerst kunnen we alleen vaststellen door naar buiten te kijken. Dus de beweging van een gegeven inertiaalstelsel kan slechts waargenomen worden als beweging t.o.v. van een ander inertiaalstelsel. Daar coördinatenstelsels altijd vast verbonden zijn met een of ander stoffelijk lichaam, kunnen we dus feitelijk alleen relatieve snelheden tussen materiële voorwerpen vaststellen. Vandaar het standpunt van Leibniz dat alle uitspraken die gedaan worden over ruimte, of lokaties in de ruimte, te vertalen zijn in uitspraken over objecten en betrekkingen tussen objecten.

In de klassieke mechanica van Newton en Lagrange spelen conservatieve en centrale krachten een belangrijke rol. In dat geval hebben de bewegingsvergelijkingen voor een afgesloten systeem van puntdeeltjes de vorm

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{p}_i &= -\sum_{j \neq i} \nabla_i V(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) \\ &= -\sum_{j \neq i} \frac{dV}{dr_{ij}} \frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}} \quad ,\end{aligned}\tag{1.3.1}$$

waarin $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(t)$ de carthesische positie van deeltje i op tijdstip t is, en V de wisselwerkingspotentiaal als functie van de absolute waarde van de onderlinge afstandsvector $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$. Het is eenvoudig in te zien dat deze vergelijkingen covariant (= vorm invariant) zijn onder de wiskundige transformatie

$$\mathbf{r}' = R\mathbf{r} + \mathbf{V}t + \mathbf{d} \quad ,\tag{1.3.2}$$

$$t' = t + \tau \quad ,\tag{1.3.3}$$

waarin $\mathbf{V}$, $\mathbf{d}$ en τ constanten zijn, en R een orthogonale draaingsmatrix. Dit betekent dat twee oplossingen van de vergelijkingen (1.3.1) verbonden zijn volgens

$$\mathbf{r}'_i(t') = R\mathbf{r}_i(t) + \mathbf{V}t + \mathbf{d} \quad .\tag{1.3.4}$$

Welke van deze oplossingen gerealiseerd wordt hangt af van de begincondities. Dit is de actieve interpretatie van de transformatie (1.3.2), (1.3.3).

We kunnen de transformatievergelijkingen echter ook opvatten als een coördinatentransformatie van het inertiaalstelsel O naar een tweede inertiaalstelsel O' . Men noemt dit het passieve gezichtspunt.

Opgave 2 *Controleer dat voor waarnemer O' :*

- (a) O beweegt met snelheid $\mathbf{V}$;
- (b) de coördinaatassen van O gedraaid zijn met R ;
- (c) de oorsprong van O verplaatst is met $\mathbf{d}$ op $t = 0$;
- (d) de klok van O achterloopt met tijdverschil τ .

De transformaties van O naar O' vormen een 10-parameter groep die de Galilei-groep wordt genoemd. De covariantie van bewegingsvergelijkingen onder deze groep van transformaties wordt Galilei-invariantie genoemd, en men spreekt van het relativiteitsprincipe van Galilei (engels: *Principle of Galilean Relativity*).

Symmetrie-eigenschappen van bewegingsvergelijkingen zijn volgens het theorema van Noether te vertalen in behouden grootheden. In het onderhavige geval is dit de grootheid

$$\mathbf{K} = M\mathbf{R} - \mathbf{P}t \quad , \quad (1.3.5)$$

waarin $\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i$ de totale impuls van het systeem, $M = \sum_i m_i$ de totale massa, en $\mathbf{R}$ de zwaartepuntscoördinaat is. Deze behoudswet zegt dus dat de zwaartepuntsbeweging van een geïsoleerd systeem eenparig is. Dit is niets anders dan de traagheidswet voor samengestelde systemen. Anders gezegd, er is altijd een inertiaalstelsel te vinden ten opzichte waarvan het zwaartepunt van een mechanisch systeem in rust is.

De transformatieformule (1.3.2) heeft als direct gevolg dat de snelheden in de stelsels O en O' verbonden zijn volgens:

$$\mathbf{v}'_i(t') = \mathbf{v}_i(t) + \mathbf{V} \quad , \quad (1.3.6)$$

waarbij we voor het gemak de coördinaatassen parallel hebben genomen. Dit is het klassieke additietheorema van snelheden. Toegepast op een foton dat beweegt met snelheid $\mathbf{c}$ geeft dit

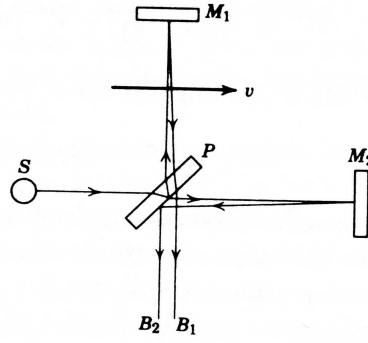
$$\mathbf{c}' = \mathbf{c} + \mathbf{V} \quad . \quad (1.3.7)$$

Als de lichtsnelheid in een gegeven inertiaalstelsel gelijk zou zijn aan c dan zou dit in ieder ander stelsel niet het geval zijn. Anderzijds voorspelt de elektromagnetische theorie van James Clark Maxwell (1831-1879) dat de snelheid van het licht in vacuüm een universele constante c is. Dus de klassieke mechanica is in tegenspraak met het principe van de constante lichtsnelheid.

Maxwell zelf dacht dat elektromagnetische golven gedragen worden door een speciaal medium, de ether, en veronderstelde dat zijn vergelijkingen slechts geldig zouden zijn t.o.v. inertiaalstelsels die in rust waren t.o.v. deze ether. Echter alle experimenten die tot op heden gedaan zijn om de snelheid van de aarde t.o.v. de ether te bepalen zijn zonder resultaat gebleven, hoewel de aarde met een snelheid van 30 km/sec rond de zon, en met een snelheid van 200 km/sec t.o.v. van het centrum van het melkwegstelsel beweegt. Overigens is het oudere experiment van Fizeau (1859) waarbij de lichtsnelheid in stromende vloeistoffen wordt bepaald, ook in strijd met de ether-hypothese, tenzij men aanneemt dat de ether gedeeltelijk wordt meegetrokken door de vloeistof. Op basis van dit laatste model had Fresnel al in 1818 de formule

$$c' = \frac{c}{n} \pm V(1 - \frac{1}{n^2}) \quad (1.3.8)$$

afgeleid, waarin V de snelheid en n de brekingsindex van het stromende medium zijn. Naar eigen zeggen, was het experiment van Fizeau van meer belang voor Einstein dan het Michelson-Morley experiment aangezien het gemeten effect lineair in de snelheid is, en niet kwadratisch zoals in het Michelson-Morley experiment.



Figuur 1.4: Interferometer van Michelson en Morley

1.4 Michelson en Morley experiment

Aan het eerste en bekendste experiment om de beweging van de aarde t.o.v. ether vast te stellen, zijn de namen verbonden van A.A. Michelson en E.W. Morley. Zij stelden in 1887 vast dat de lichtsnelheid tot op 5 km/sec hetzelfde is voor licht dat zich voortplant evenwijdig met de beweging van de aarde, en in een loodrechte richting. Het meetapparaat is een interferometer waarin het licht van een bron S wordt gesplitst in twee bundels. De ene bundel wordt gereflecteerd naar de spiegel M_1 , en dan teruggekaatst naar B_1 . De andere bundel gaat door naar de spiegel M_2 en wordt teruggekaatst naar B_2 , alwaar interferentie optreedt. Kleine verschillen in de lengte van het lichtpad kunnen direct worden waargenomen door verschillen in het interferentie patroon. De rol van de twee armen kan verwisseld worden door het apparaat te draaien.

Stel dat het apparaat een snelheid V heeft t.o.v. de ether, parallel met de arm PM_2 . De afstand PM_2 , die we aangeven als d_2 , en terug wordt door het licht dan afgelegd in het tijdsinterval:

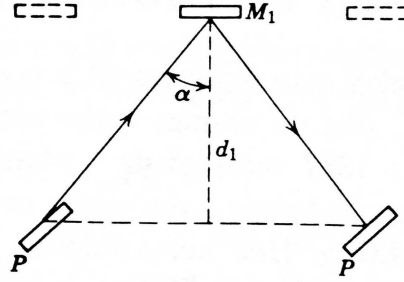
$$t_2^* = d_2 \left(\frac{1}{1 - V^*} + \frac{1}{1 + V^*} \right) = \frac{2d_2}{1 - V^{*2}} \simeq 2d_2(1 + V^{*2}) \quad . \quad (1.4.1)$$

De tijd t_1 die het licht nodig heeft om de afstand d_1 naar M_1 heen en weer af te leggen, wordt het eenvoudigste berekend in het systeem dat in rust is t.o.v. de ether; zie Fig.1.5. De afgelegde weg is

$$t_1^* = 2d_1 \frac{1}{\sqrt{1 - V^{*2}}} \simeq 2d_1 \left(1 + \frac{1}{2} V^{*2} \right) \quad . \quad (1.4.2)$$

Het verschil tussen de twee tijden is

$$\Delta t^* = t_2^* - t_1^* = 2[(d_2 - d_1) + V^{*2}(d_2 - \frac{1}{2}d_1)] \quad . \quad (1.4.3)$$



Figuur 1.5: Lichtpad

Als we het apparaat nu over 90° draaien dan vinden we een tijdsverschil

$$\Delta t^{*'} \simeq 2[(d_2 - d_1) - V^{*2}(d_1 - \frac{1}{2}d_2)] \quad . \quad (1.4.4)$$

De twee tijdsintervallen zijn ongelijk en er resulteert een verschil

$$\Delta t^* - \Delta t^{*'} = (d_1 + d_2)V^{*2} \quad . \quad (1.4.5)$$

Aangezien de baansnelheid van de aarde van de orde 30 km/sec is, zal $V^{*2} = V^2/c^2$ van de orde 10^{-8} zijn. Als we de afmetingen van het apparaat op 3 m stellen, dan vinden we een verschil van $3 \times 10^{-8} \text{ m} = 300 \text{ \AA}$. Het zichtbare licht heeft een golflengte van 5000 $\text{\AA}$. Het effect is dus een kleine, doch meetbare, verschuiving van het interferentiepatroon. Noch in het experiment van Michelson en Morley, noch in latere experimenten, is enig effect gevonden.

Michelson en Morley herhaalden het experiment gedurende verschillende seizoenen van het jaar. Hun conclusie was dat de lichtsnelheid in de twee loodrechte richtingen hetzelfde is tot op één-zesde van de snelheid van de aarde. Door experimenten die in latere jaren door Michelson zijn gedaan, voor de laatste keer in 1929, is het nul-resultaat bevestigd met een nauwkeurigheid van 10^{-6} . In het experiment van Kennedy en Thorndike (1932) is ook vastgesteld dat licht dezelfde snelheid heeft in twee referentiestelsels die eenparig t.o.v. elkaar bewegen. Evenals Michelson en Morley gebruikten Kennedy en Thorndike de aarde als bewegend laboratorium. Uit de meting volgt dat het verschil in snelheid van het licht in twee stelsels die met een snelheid van 60 km/sec t.o.v. elkaar bewegen, kleiner is dan 2 m/sec. De conclusie moet zijn dat er geen bevoorrecht inertiaalstelsel bestaat met betrekking tot de voortplanting van licht.

1.5 Gelijktijdigheid

In zijn beroemde artikel van 1905 “Zur Elektrodynamik bewegter Körper” formuleerde Einstein de speciale relativiteitstheorie gebaseerd op twee fundamentele postulaten:

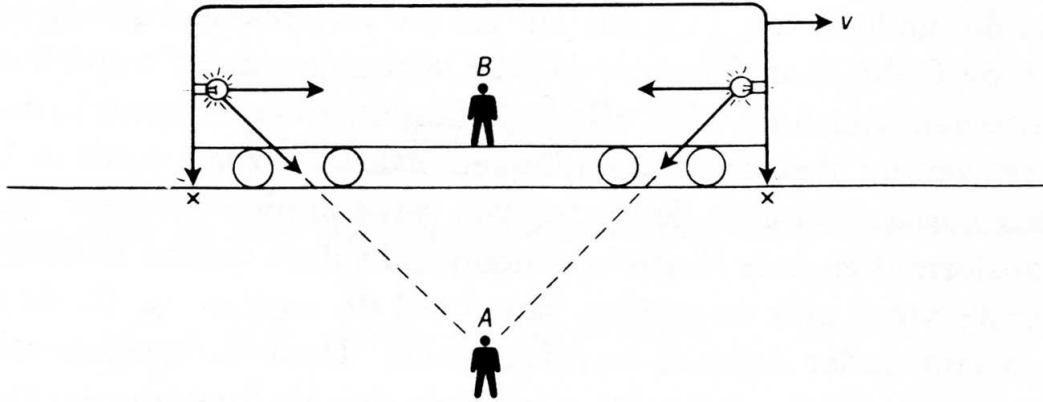
- Alle inertiaalstelsels zijn equivalent met betrekking tot alle fysische wetten
- Licht plant zich in vacuum voort t.o.v. een inertiaalstelsel met snelheid c , ongeacht de bewegingstoestand van de bron, de golflengte, de polarisatie en de intensiteit.

Het tweede postulaat, dat als een speciaal geval van het eerste gezien kan worden, impliceert dat de snelheid van het licht altijd dezelfde waarde heeft. Nog belangrijker is echter het postulaat dat de lichtsnelheid onafhankelijk is van de snelheid van de bron. Dit zal als verstrekkend gevolg blijken te hebben dat de Galileitransformatie (1.3.2) vervangen moet worden door een andere groep van transformaties, zijnde de Lorentzgroep. Deze transformaties laten de vorm van de Maxwell-vergelijkingen invariant, zoals reeds in 1904 aangetoond door Lorentz. Omdat de wetten van Newton niet invariant zijn onder Lorentz-transformaties, was Einstein genoodzaakt deze wetten te herformuleren. In de nieuwe vorm zijn de wetten van zowel de mechanica als de electrodynamica invariant onder Lorentz-transformaties. Door de speciale relativiteitstheorie werd op deze wijze het relativiteitsprincipe als fundamenteel principe voor alle fysische wetten in ere hersteld.

De Lorentztransformatie bespreken we in het volgende hoofdstuk. Hier gaan we in op het begrip ‘gelijktijdigheid’ dat zo’n belangrijke rol speelt in de theorie van Einstein. We beschouwen eerst één enkel inertiaalstelsel O . In de behandeling van de klassieke mechanica hebben we steeds stilzwijgend aangenomen dat we aan een willekeurige ruimtelijke gebeurtenis een tijd kunnen toekennen mits we beschikken over een klok. We zullen nu echter onderscheid gaan maken tussen lokale en globale gelijkzijdigheid. Lokale gelijkzijdigheid is een primitief begrip en komt neer op veronderstelling dat we met een horloge in de hand aan gebeurtenissen in onze onmiddellijke omgeving een unieke tijd kunnen toekennen.

Einstein heeft duidelijk gemaakt dat de gelijkzijdigheid van twee gebeurtenissen die ver van elkaar plaatsvinden een kwestie van afspraak is. Het probleem is dat alle signalen waarmee we kunnen communiceren altijd een eindige snelheid hebben. Het feit van de eindige snelheid van het licht (en van alle andere soorten electromagnetische straling), dus van de eindige snelheid waarmee informatie kan worden overgebracht, heeft tot gevolg dat we er niet achter kunnen komen welke gebeurtenis op onze huidige lokatie werkelijk samenvalt met een andere, ver verwijderde gebeurtenis. Wanneer we volhouden dat absolute gelijkzijdigheid bestaat, dan worden we geconfronteerd met vragen die we niet kunnen beantwoorden. Einstein laat daarom het denkbeeld van absolute gelijkzijdigheid varen. In plaats daarvan moeten we spreken van gelijkzijdigheid ten opzichte van een bepaald coördinatenstelsel.

Het gedachte-experiment geschetst in Fig. 1.6 illustreert de waarnemer-afhankelijke betekenis van het begrip gelijkzijdigheid. Een trein beweegt met snelheid V t.o.v. de waarnemer A . Een tweede waarnemer bevindt zich in het midden van één van de wagons. Op het moment dat de wagon zich precies tegenover A bevindt geven twee lampen ter linker en rechterzijde van B een lichtflits af. Het is duidelijk dat volgens A de lichtflitsen gelijktijdig zijn. Waarnemer B beweegt naar de lichtbron rechts. Omdat de lichtsnelheid constant is zal B dus het licht van deze lichtbron het eerst waarnemen. Vanuit zijn standpunt gezien zijn de twee lichtflitsen niet gelijktijdig.



Figuur 1.6: Gelijktijdigheid is relatief

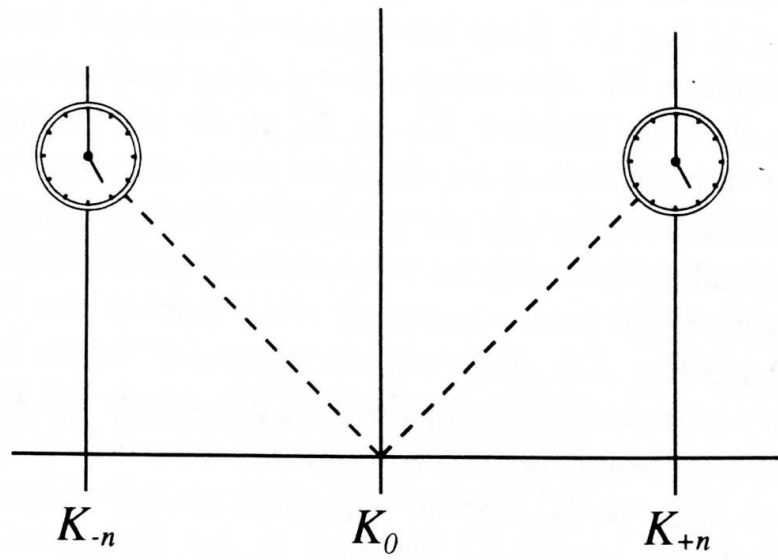
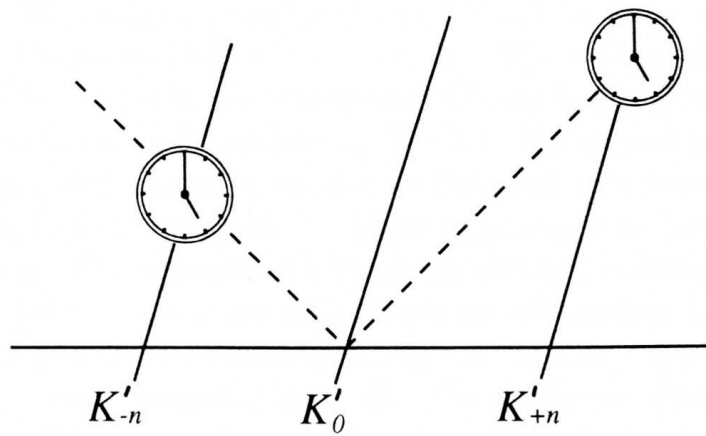
Het opgeven van absolute gelijktijdigheid heeft gevolgen voor de manier waarop verschillende waarnemers een tijdstip aan een bepaalde gebeurtenis toekennen. Om het probleem duidelijk te stellen beperken we ons tot één ruimte-dimensie. In de oorsprong van dit coördinatenstelsel bevindt zich een waarnemer met een standaard klok K_0 . Op een afstand van één meter bevindt zich een waarnemer met een tweede klok K_1 , enzovoort. De klokken zijn identiek en nauwkeurig vervaardigd en zijn, na terplekke gelijkgesteld te zijn met de standaardklok, door de waarnemers naar hun respectievelijke posities langs de x -as gebracht.

Na enige tijd willen we weten of de klokken nog steeds synchroon lopen. Daartoe kunnen we een functionaris van het ijkwezen op pad sturen met een hulpklok om overal de synchronisatie te controleren. We kunnen echter ook op een afgesproken tijdstip t_0 een lichtflits (of een radiopuls) uitzenden vanuit de oorsprong. Twee klokken K_n en K_{-n} heten dan gesynchroniseerd als ze beide het tijdstip

$$t_{\pm n}^* = t_0^* + |n| \quad (1.5.1)$$

aanwijzen op het moment dat de puls arriveert. Deze methode van synchronisatie m.b.v. electromagnetische signalen is nauwkeuriger dan de eerst genoemde methode en wordt daarom ook in de praktijk toegepast. Bovendien heeft de eerste methode het bezwaar dat een bewegende klok achterloopt, zoals we zullen zien, alhoewel de afwijkingen $\mathcal{O}(V^2/c^2)$ zijn, en dus willekeurig klein te maken. We zullen daarom aannemen dat klokken op verschillende ruimtelijke lokaties volgens de tweede methode zijn gesynchroniseerd. Hierbij maken we dus essentieel gebruik van het gegeven dat de lichtsnelheid een constante is.

We stellen ons nu voor dat een tweede waarnemer O' met snelheid V naar rechts beweegt in Fig 1.7. Deze bewegende waarnemer heeft volgens hetzelfde procédé

Figuur 1.7: Synchronisatie van klokken in O .Figuur 1.8: Synchronisatie van klokken in O' .

de klokken in zijn referentiestelsel gesynchroniseerd. Op tijdstrip $t_0 = 0$ vallen de twee klokken K_0 en K'_0 in de oorsprong samen. De cruciale observatie van Einstein is nu dat deze twee waarnemers fundamenteel van inzicht verschillen over wat zij als ‘gelijktijdig’ beschouwen. Om dat in te zien moeten we bedenken dat, volgens waarnemer O , een lichtflits uitgezonden vanuit de oorsprong altijd eerder aankomt bij de positie van klok K'_{-n} dan bij die van klok K'_n ; zie Fig. 1.8. Volgens waarnemer O' lopen beide klokken gelijk, maar volgens waarnemer O loopt de klok K'_n achter op K'_{-n} .

Uit de tekening volgt dat het tijdverschil toeneemt met V en de onderlinge afstand tussen K'_{-n} en K'_n . Merk nogmaals op dat volgens waarnemer O' de klokken gelijk lopen omdat de afspraak is dat de aankomst van de lichtflits gelijktijdigheid definieert.

Opgave 3

- (a) *Schets lijnen van gelijktijdigheid in zowel fig. 1.7 als fig. 1.8.*
- (b) *Beredeneer dat volgens waarnemer O de klok K'_n achter loopt op K'_{-n} .*
- (c) *Beredeneer dat volgens waarnemer O' de klokken K_n in voorwaartse richting voorlopen.*
- (d) *Beredeneer dat O' de klokken K_{-n} in achterwaartse richting ziet achterlopen.*
- (e) *Probeer in te zien dat absolute gelijktijdigheid onverenigbaar is met een eindige signaalsnelheid voor informatie-overdracht.*

Hoofdstuk 2

Lorentztransformatie

‘Lorentz invariance’ is a general condition for any physical theory.

Albert Einstein
1879-1955

2.1 Tijdvertraging

We beschouwen twee inertiaalstelsels O en O' die met snelheid $V < c$ t.o.v. elkaar bewegen. De speciale relativiteitstheorie van Einstein geeft de betrekking tussen deze twee stelsels op basis van het relativiteitsprincipe dat zegt dat alle inertiaalsystemen equivalent zijn m.b.t. alle fysische wetten. In de algemene relativiteitstheorie van 1915, die we hier niet bespreken, werd door Einstein dit principe uitgebreid tot alle referentiestelsels, ook stelsels die versneld bewegen.

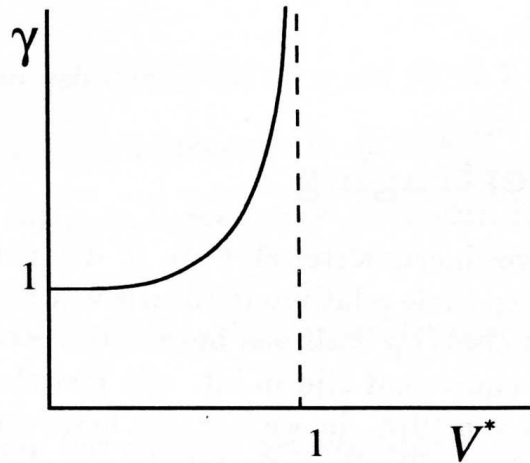
Hierboven hebben we reeds geconstateerd dat het begrip gelijktijdigheid relatief is en dat de synchronisatie van klokken gebonden is aan een bepaald inertiaalstelsel. We zullen nu ook laten zien dat een klok die beweegt langzamer loopt dan een identieke klok die in rust is. We stellen ons voor dat zowel waarnemer O , die in rust is, als waarnemer O' , die beweegt met snelheid V , de tijd registreren m.b.v. een lichtklok, zie Fig.1.1. We nemen aan dat de afstand tussen de spiegels één meter is, en dat de twee spiegels steeds evenwijdig zijn met de richting van de snelheid V . Voor waarnemer O beweegt de lichtklok K' van waarnemer O' met snelheid V , en hij ziet het lichtsignaal heen en weer kaatsen tussen twee spiegels die zich steeds op een andere positie bevinden.

De situatie komt overeen met die in Fig.1.5. Stel Δ is het tijdinterval tussen twee kaatsingen zoals gemeten door O . Uit de figuur zien we dat het licht tussen twee kaatsingen een afstand $c\Delta$ moet afleggen die groter is naarmate V groter is. De lichtsnelheid c is echter onveranderlijk, dus wordt het tijdverschil Δ gegeven door de betrekking

$$(c\Delta)^2 = (V\Delta)^2 + 1 \quad . \quad (2.1.1)$$

Hieruit volgt dat voor waarnemer O een tijd verstrijkt gegeven door

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2}} \quad (2.1.2)$$



Figuur 2.1: Tijdvertragsfactor

tussen twee tikken van de klok K' . Voor het tijdsverloop tussen twee willekeurige gebeurtenissen wordt het verband dus gegeven door

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - V^{*2}}} \quad . \quad (2.1.3)$$

Daarin zijn Δt en $\Delta t'$ de tijdintervallen zoals die gemeten worden door respectievelijk waarnemer O en O' .

Volgens O loopt de bewegende klok dus langzamer met een vertragsfactor

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^{*2}}} \quad . \quad (2.1.4)$$

Voor kleine snelheden $V^* \ll 1$ wordt dit

$$\gamma = 1 + \frac{1}{2}V^{*2} + O(V^{*4}) \quad . \quad (2.1.5)$$

Het effect is dus van orde V^2/c^2 , en praktisch onmeetbaar voor snelheden die in het dagelijkse leven een rol spelen.

Opgave 4

- (a) Bereken het effect van tijdvertraging voor een klok die zich beweegt met een snelheid van 1000 km/u.
- (b) Wat is na een dag het totale tijdsverschil met een klok die in rust is gebleven?

Het lijkt alsof er nu een fundamenteel conflict is ontstaan tussen de tijdwaarnemingen van O en O' . Dit is echter geenszins het geval. Immers we moeten bedenken

dat waarnemer O' slechts te maken heeft met één klok, terwijl O daarentegen de tijd vergelijkt met steeds weer andere klokken omdat de klok K' voortdurend van plaats verandert. We hebben al vastgesteld in Opgave 3 dat voor een bewegende waarnemer de klokken van een stelsel in rust lijken vóór te lopen in de voorwaartse richting, en achter te lopen in de achterwaartse richting. Het is dus voor de bewegende waarnemer O' duidelijk dat O wel een vertraging moet meten, aangezien de klokken die O gebruikt voor deze metingen steeds verder vooruit lopen. Het is niet zozeer dat de tijd vertraagd is, als wel dat de klokken systematisch voorlopen in het stelsel O . Beide waarnemers zijn het eens over het effect van tijdvertraging, maar verschillen in inzicht over wat daarvan de oorzaak is.

Het effect van tijdvertraging (engels: *time dilatation*) wordt experimenteel gemeten bij het spontane verval van elementaire deeltjes die zich met zeer grote snelheid bewegen. Muonen, bijvoorbeeld, hebben in rust een gemiddelde levensduur van 2×10^{-6} sec. Maar als de muonen versneld worden tot snelheden dicht bij de lichtsnelheid, wordt een veel langere vervaltijd waargenomen. Bij CERN heeft men gemeten dat muonen met een snelheid van 99,94 % van de lichtsnelheid een levensduur hebben die 29 keer groter is dan normaal. Dit is in zeer goede overeenstemming met de voorspelling van de relativiteitstheorie.

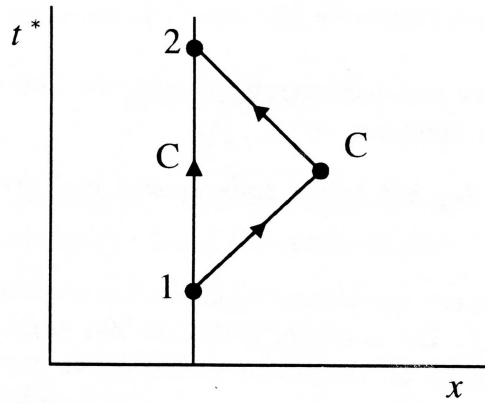
Opgave 5 *Bereken de vertragingfactor voor de muonen.*

Het vertragingseffect is ook gemeten door een atoomklok met een vliegtuig rond de aarde te laten gaan, en vervolgens de tijd te vergelijken met een identieke atoomklok die niet verplaatst was. Hoewel de tijdvertraging niet groter was dan 10^{-7} sec in dit experiment, zie Opgave 4, was het effect toch meetbaar.

De vraag die men zich hierbij kan stellen is waarom het niet de klok in rust is die de vertraging vertoont. Immers volgens de relativiteitstheorie is er geen toestand van absolute rust. Het lijkt of we de vrijheid hebben om de klok in het vliegtuig gedurende de gehele reis als in rust te beschouwen terwijl we de klok op aarde laten weg-bewegen en weer terugkeren. Dan zou de aardse klok langzamer moeten lopen.

Dit is een voorbeeld van wat bekend staat als de tweeling-paradox van Einstein. In deze paradox laat Einstein een tweelingbroer per ruimteschip de aarde verlaten, naar een andere ster reizen, en vervolgens weer terugvliegen naar de aarde. Is de terugkerend ruimtereiziger nu jonger of ouder dan zijn tweelingbroer die op aarde is achtergebleven?

De paradox wordt opgelost door op te merken dat de twee situaties toch niet geheel vergelijkbaar zijn. De ruimtereiziger heeft een raket nodig die hem versneld t.o.v. het referentiestelsel van de aarde, dat we in het onderhavige geval als inertiaal mogen beschouwen. In de schets van Fig.2.2 treedt zelfs een oneindige versnelling op in het punt C' . Dientengevolge is het referentiestelsel van de ruimtereiziger niet-inertiaal, en kan hij de tijdvertragings-formule niet op dezelfde wijze gebruiken als zijn aardse tweelingbroer.



Figuur 2.2: Tweeling-paradox

2.2 Lengteverkorting

Het effect van lengteverkorting is complementair met het effect van tijdvertraging, en een gevolg van het feit dat de lichtsnelheid voor iedere waarnemer gelijk is. Stel L_0 is de lengte van een meetlat die in rust is in O' . Gemeten vanuit O heeft de meetlat een snelheid V en een schijnbare lengte

$$L = \sqrt{1 - V^{*2}} L_0 \quad , \quad (2.2.1)$$

aangenomen dat de meetlat een orientatie parallel met de snelheid heeft. Volgens de relativiteitstheorie is er geen effect voor een bewegende meetlat met een loodrechte orientatie. Opgemerkt moet worden dat bij de huidige stand van de waarnemetechniek, lengteverkorting, in tegenstelling tot tijdvertraging, niet direct waarneembaar is. Dit kan echter geen reden zijn om te twifelen aan de relativiteitstheorie omdat in hoge-energie experimenten en de versneller-fysica relativistische effecten tot de routine van alle dag behoren.

Formule (2.2.1) wordt wel de Fitzgerald-Lorentz contractie formule genoemd, omdat de genoemden resp. in 1889 en 1892 de verkorting van materiële lichamen in de richting van hun beweging postuleerden als verklaring voor het Michelson-Morley experiment. Het is echter onjuist om te denken dat voorwerpen ook daadwerkelijk korter worden t.g.v. hun beweging. Ook is het onjuist om de verkorting te verklaren uit het feit dat de verschillende delen van een voorwerp met eindige afmetingen een verschillende afstand tot een gegeven waarnemer hebben. Als gevolg hiervan zal een fotografisch beeld van een bewegend voorwerp deze verschillende delen op verschillende tijdstippen tonen. Dit heeft een optische vervorming tot gevolg zoals pas voor het eerst opgemerkt door Terrell in 1959. In boek [2] kan men een illustratie van deze relativistische beeldvervorming vinden.

Ook bij de lengteverkorting speelt de definitie van gelijktijdigheid weer een cruciale rol. Immers, de lengte van een object wordt bepaald door de afstand tussen de coördinaten van de twee eindpunten, gemeten op *hetzelfde* tijdstip. Omdat gelijktij-

digheid geen objective betekenis heeft, zal een waarnemer een bewegend voorwerp iets korter zien dan een volkomen identiek voorwerp dat stilstaat. In het laatste geval speelt gelijktijdigheid geen rol, maar om de lengte van de bewegend voorwerp te meten moeten we afspreken wat we verstaan onder gelijktijdigheid.

Stel een meetlat met lengte L_0 beweegt met snelheid V . De rustende waarnemer O meet op een bepaald tijdstip de coördinaten van begin en eindpunt en vindt daaruit een lengte $L < L_0$. Bij waarnemer O' , die in rust is t.o.v. de meetlat, wekt dit geen verbazing. Immers deze waarnemingen vinden niet gelijktijdig plaats: het eindpunt in de voorwaartse richting wordt eerder gemeten dan het eindpunt in de achterwaartse richting, omdat klokken in de voorwaartse richting voorlopen op die in de achterwaartse richting. Dus gezien vanuit O' is het onmiddellijk duidelijk dat de waarnemer O een lengte zal vinden die te kort is. Omdat het achterste eindpunt nog een extra afstand kan afleggen gedurende het tijdverschil, zal de totaal gemeten afstand kleiner zijn.

De twee beschrijvingen zijn niet met elkaar in tegenspraak. We kunnen hetzelfde verschijnsel op twee verschillende manieren beschrijven, afhankelijk van de keuze van het coördinatenstelsel. Waar het op neerkomt is dat uitspraken over lengte en tijd alleen zin hebben als ze betrokken worden op een bepaald coördinatenstelsel.

Afmetingen van voorwerpen loodrecht op de bewegingsrichting worden niet beïnvloed. Het bewijs volgt door twee identieke stukken pijp met een zekere diameter te beschouwen, waarvan de éne in beweging is. Als de diameter kleiner zou zijn gezien vanuit het rustende stelsel, zou de bewegende pijp in de stilstaande pijp moeten passen. Maar dit is een tegenspraak aangezien de bewegende waarnemer juist de omgekeerde conclusie zou trekken.

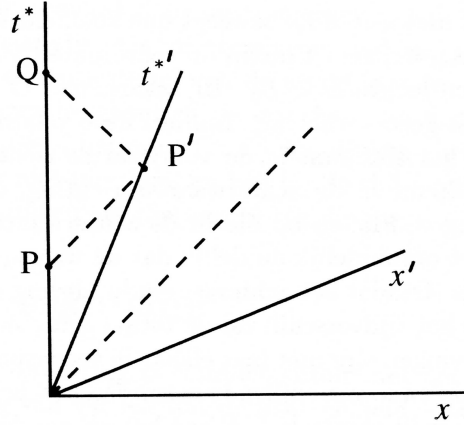
Opgave 6 *Ga na dat als de meetlat in rust is in O , dat dan O' een lengte zal meten die te kort is.*

2.3 Minkowski-diagram

Begrippen als gelijktijdigheid en tijdvertraging zijn direct aanschouwelijk te maken in een ruimte-tijd diagram. Voor de eenvoud beperken we ons tot één ruimtelijke dimensie. We zetten de ruimtelijke coördinaat x en de tijd t^* uit in het ruimte-tijd diagram Fig. 2.3. Men noemt dit vaak een Minkowski-diagram. De tijd-as representeert de opeenvolgende posities van de oorsprong O van een inertiaalstelsel in rust. Anderzijds volgt de oorsprong O' van een bewegend inertiaalstelsel de schuine lijn aangegeven met $t^{*'}.$ Langs die lijn, die de helling $dt^*/dx = V^{*-1}$ heeft, geldt $x' = 0$ op alle tijdstippen. Dus moet dit de $t^{*'}-as$ zijn. We nemen aan dat op tijdstip $t^* = t^{*'} = 0$ de twee coördinatenstelsels precies over elkaar vallen.

Opgave 7

- (a) *Schets de wereldlijnen van alle gebeurtenissen die plaatsvinden op afstanden van $x = 1$ meter, 2 meter, etc. van de oorsprong;*
- (b) *idem op afstanden $x' = 1$ meter, 2 meter, etc.*



Figuur 2.3: Minkowski diagram

De x' -as is de meetkundige plaats van alle gebeurtenissen die plaatsvinden op tijdstip $t^{*'} = 0$. We vinden deze as door te bedenken dat de wereldlijn van een lichtsignaal, uitgezonden op dit tijdstip vanuit de oorsprong, zich zal voortplanten met snelheid $c^* = 1$. Het golffront voldoet aan de vergelijking

$$t^* = |x| \quad . \quad (2.3.1)$$

T.g.v. het feit dat de lichtsnelheid invariant is, zal ook waarnemer O' een golffront zien, beschreven door

$$t^{*'} = |x'| \quad . \quad (2.3.2)$$

De wereldlijn van het lichtsignaal ligt dus symmetrisch tussen zowel de t^*, x -assen als de $t^{*'}, x'$ -assen, zoals geschetst in Fig. 2.3.

Opgave 8 *Schets de wereldlijn van alle gebeurtenissen die gelijktijdig zijn*

- (a) *in het t^*, x -stelsel;*
- (b) *in het $t^{*'}, x'$ -stelsel.*

Tijddilatatie en andere relativistische effecten kunnen nu op een aanschouwelijke wijze worden afgeleid m.b.v. de zogenaamde k -factor, geïntroduceerd door Hermann Bondi; men spreekt van de k -rekening (engels: *k-calculus*). Stel O zendt een serie lichtsignalen naar O' met vaste periode T . We mogen aannemen dat O' deze signalen zal ontvangen met eveneens een vaste periode, zeg kT . De onbekende factor k zal afhangen van de helling $V^* = V/c$ van de $t^{*'}$ -as.

Stel in Fig. 2.3 heeft het lijnstuk OP de lengte T^* en het lijnstuk OP' de lengte kT^* . De factor k bepalen we door het licht vanuit P' nog eens terug te kaatsen naar Q . Aangezien de relatie tussen de waarnemers O en O' reciprook is, moet de lengte OQ gelijk zijn aan k^2T^* . Hiermee hebben we genoeg informatie om de tijd- en plaatscoördinaat (t^*, x) van P' t.o.v. O vast te leggen

$$t^* = \frac{1}{2}(k^2T^* + T^*) \quad , \quad (2.3.3)$$

$$x = \frac{1}{2}(k^2 T^* - T^*) \quad . \quad (2.3.4)$$

Maar we weten ook dat $x = V^* t^*$. Hieruit kunnen we nu de k -factor oplossen als

$$k = \left(\frac{1 + V^*}{1 - V^*} \right)^{\frac{1}{2}} \quad . \quad (2.3.5)$$

Deze k -factor geeft de relativistische Doppler-verschuiving van het licht ontvangen door O' .

Opgave 9

- (a) Laat zien dat voor $k > 1$ de waarnemer O' wegbeweegt van O ; beschrijf ook het geval $k < 1$.
- (b) Bestudeer de substitutie $V \rightarrow -V$ en de limieten $V \rightarrow 0$ en $V \rightarrow c$.

Nu we beschikken over de k -factor, kunnen we ook uitrekenen wat de tijdvertraging is die een met O' meebewegende klok ondervindt. Volgens O' is de tijdsduur die correspondeert met OP' gelijk aan $t' = kT$. Maar waarnemer O klokt de gebeurtenis P' op tijdstip

$$t = \frac{1}{2}(k^2 + 1)T \quad . \quad (2.3.6)$$

Voor de verhouding van deze twee tijden volgt:

$$t = \frac{1}{2} \left(\frac{k^2 + 1}{k} \right) t' = \gamma t' \quad , \quad (2.3.7)$$

met γ de tijdvertragingsfactor (2.1.4).

Opgave 10 Behandel op dezelfde wijze de lengtecontractie.

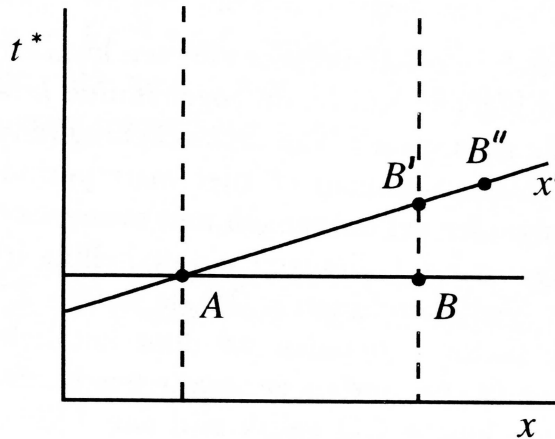
Het is van belang op te merken dat de schaal langs de schuine assen in een Minkowski-diagram, en die langs de rechte assen, niet gelijk is. We illustreren dit in figuur 2.4. Stel een meetlat is in rust in het inertiaalstelsel O en heeft daar de eenheidslengte AB . Een bewegende waarnemer O' zal echter de twee eindpunten van de meetlat markeren in A en B' , omdat deze beide punten in zijn stelsel gelijktijdig zijn. Hij zal dus aan dezelfde meetlat een andere, kortere, lengte $AB' < AB$ toekennen. Aangezien voor de meetkundige lengte van het lijnstuk AB' geldt $AB' > AB$ moeten we concluderen dat de twee eenheidslengten langs de assen $t^* = \text{const.}$ en $t^{*'} = \text{const.}$ niet door een evenlang lijnstuk gerepresenteerd worden.

Opgave 11

- (a) De eenheidslengte langs de x' -as is een factor

$$\frac{(1 + V^{*2})^{\frac{1}{2}}}{(1 - V^{*2})^{\frac{1}{2}}} \quad (2.3.8)$$

groter dan die langs de x -as. Bewijs dit.



Figuur 2.4: Lengtemeting is relatief.

(b) Verplaats het punt A in Fig. 2.4 naar de oorsprong en laat zien dat de coördinaten van het punt B'' voldoen aan de vergelijking

$$x^2 - t^{*2} = 1 \quad . \quad (2.3.9)$$

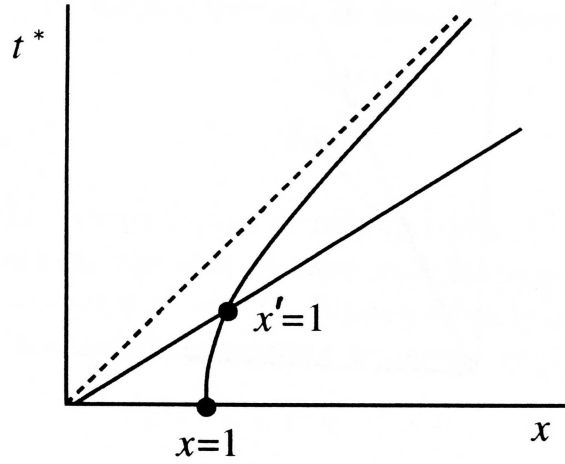
Uit Opgave 11 volgt dat punten met een afstand van één meter tot de oorsprong op de hyperbool (2.3.9) liggen. Op de doorsnijding met de x -as vinden we het punt $x = 1$, en op de doorsnijding met de x' -as het punt $x' = 1$.

Deze constructie kunnen we toepassen in Fig. 2.4. De hyperbool door B zal de x' -as snijden in een punt B'' dat voorbij B' ligt. Dus kennelijk geldt $AB' < AB$. de meetlat lijkt dus korter gezien vanuit het bewegende stelsel. Het is duidelijk dat de constructie het gevolg is van de gevolgde meetprocedure die in O en O' betrekking heeft op verschillende gebeurtenissen. De vraag of de meetlat werkelijk korter is heeft dus geen betekenis.

2.4 Ruimte-tijd afstand

We zoeken nu het algemene verband tussen de coördinaten $(t^*, \mathbf{x})$ van een inertiaalstelsel O in rust, en de coördinaten $(t^{*'}, \mathbf{x}')$ behorende bij een bewegend inertiaalstelsel O' . Onze uitgangspunten zijn:

- ruimte en tijd zijn homogeen, d.w.z. de oorsprong van de ruimte- en tijd-coördinaten kan willekeurig gekozen worden.
- ruimte is isotroop, d.w.z. er is geen voorkeursrichting.



Figuur 2.5: Lengteschaal

- alle inertiaalstelsels zijn equivalent voor alle natuurkundige verschijnselen.

Deze uitgangspunten impliceren dat de coördinatentransformatie slechts lineair kan zijn. Anders zou eenparige beweging niet eenparig blijven.

We bekijken eerst weer het twee-dimensionale geval en beschouwen nu een willekeurig punt P in het tijd-ruimte diagram Fig. 2.6 met tijd-ruimte coördinaten (t^*, x) t.o.v. waarnemer O en (t'^*, x') t.o.v. waarnemer O' . De wereldlijn door P van een lichtsignaal uitgezonden door O moet vertrekken van het punt $t^* - x$ op de t^* -as en snijdt de t'^* -as op het tijdstip $t'^* - x'$. Volgens de k -rekening is het verband

$$t'^* - x' = k(t^* - x) \quad . \quad (2.4.1)$$

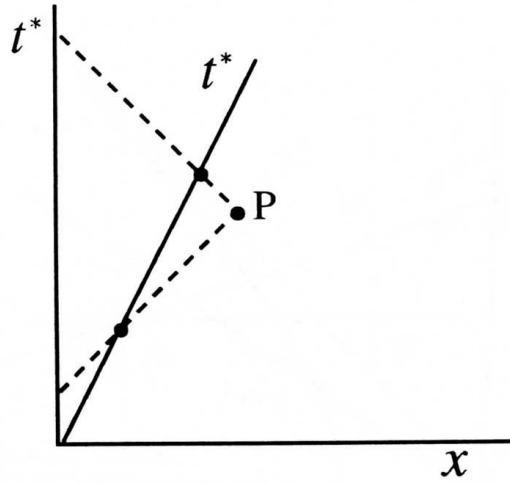
Vanuit P kaatsen we het lichtsignaal weer terug naar O . De doorsnijdingspunten met de t'^* -as en t^* -as leveren het tweede verband

$$t^* + x = k(t'^* + x') \quad . \quad (2.4.2)$$

We vinden hieruit de algemene betrekking

$$\tau^{*2} = t^{*2} - x^2 = t'^{*2} - x'^2 = t'^{*2} \quad (2.4.3)$$

voor ruimte-tijd coördinaten (t^*, x) en (t'^*, x') geassocieerd met dezelfde punt-gebeurtenis. Men noemt τ^* de ruimte-tijd afstand. De kwadratische uitdrukking (2.4.3) is voor alle waarnemers hetzelfde, ongeacht hun beweging. Voor de afzonderlijke in ruimte en tijd gemeten afstanden zullen waarnemers i.h.a. verschillende waarden vinden, maar als zij m.b.v. deze waarden het interval (2.4.3) in de tijd-ruimte berekenen, verkrijgen zij allen dezelfde ruimte-tijdafstand. Men noemt daarom $\tau^{*2} = c^2 \tau^2$ een Lorentz-invariant.



Figuur 2.6: Puntgebeurtenis in twee Lorentz-stelsels.

Opgave 12 *Veronderstel dat de ruimte-tijd afstand voldoet aan de betrekking*

$$\tau^2 = \lambda(V)\tau'^2 \quad (2.4.4)$$

met $\lambda(V)$ een schaalfactor zodanig dat $\lambda(0) = 1$.

Beredeneer dat:

(a) *de schaalfactor moet voldoen aan*

$$\lambda(V)\lambda(-V) = 1 \quad ; \quad (2.4.5)$$

(b) *op grond van de uitgangspunten de schaalfactor de waarde*

$$\lambda(V) = 1 \quad (2.4.6)$$

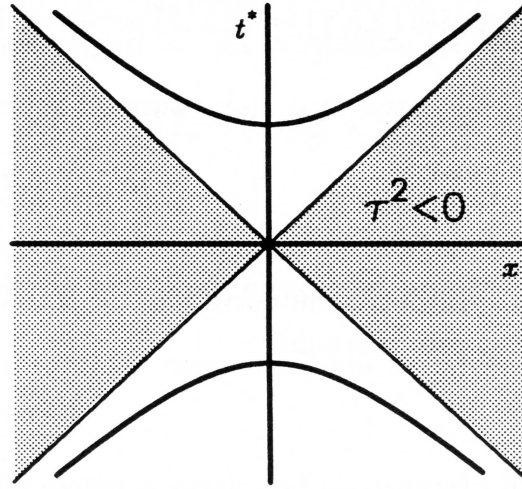
moet hebben.

Op grond van de invariantie van de ruimte-tijd afstand laat zich het vlak van een Minkowski-diagram verdelen in twee invariante gebieden, nl. één binnen en één buiten de lichtkegel $x^2 = c^2t^2$. Binnen de lichtkegel hebben alle punten een ruimte-tijdafstand tot de oorsprong waarvoor geldt

$$c^2\tau^2 = c^2t^2 - x^2 > 0 \quad . \quad (2.4.7)$$

Men noemt zulke afstanden *tijd-achtig*, omdat voor een willekeurige waarnemer in de oorsprong geen van de punten binnen de lichtkegel gelijktijdig is. Buiten de lichtkegel geldt

$$c^2\tau^2 = c^2t^2 - x^2 < 0 \quad . \quad (2.4.8)$$



Figuur 2.7: Tijd- en ruimte-achtige (gearceerd) gebieden

Alle gebeurtenissen in deze gebieden hebben een *ruimte-achtige* afstand, omdat voor een willekeurige waarnemer in de oorsprong alle punten buiten de lichtkegel zich op een andere plaats bevinden.

In het geval van drie ruimtelijke dimensies vormen ruimte en tijd een vierdimensionaal continuüm. Het kwadraat van de afstand tussen twee naburige ruimte-tijd punten wordt gegeven door

$$\Delta\tau^2 = (\Delta t)^2 - c^{-2}|\Delta\mathbf{x}|^2 \quad . \quad (2.4.9)$$

Deze afstand is invariant voor iedere waarnemer: $\Delta\tau^2 = \Delta\tau'^2$. Als geldt $\Delta\tau^2 = 0$ kunnen we de twee punten verbinden met een lichtsignaal; men zegt dat deze twee punten op de lichtkegel liggen. Als $\Delta\tau^2 > 0$ dan is de afstand tijdsachtig. De grootte $\Delta\tau^2$ kan ook negatief zijn voor gebeurtenissen die gelijktijdig op twee ruimtelijk gescheiden punten plaatsvinden. De afstand $\Delta\tau$ is dan niet gedefinieerd.

2.5 Transformatie-formules

De Lorentz-transformatie is gedefinieerd als de meest algemene lineaire transformatie van de ruimte-tijd coördinaten die de ruimte-tijd afstand (2.4.9) invariant laat. Voor het 2D-geval is deze transformatie direct te vinden uit de al eerder afgeleide vergelijkingen (2.4.1) en (2.4.2). Na invullen van (2.3.5) en enkele algebraïsche manipulaties, vinden we de transformatie-formules

$$x' = \gamma(x - V^*t^*) \quad , \quad (2.5.1)$$

$$t^{*'} = \gamma(t^* - V^*x) \quad , \quad (2.5.2)$$

met daarin de tijdvertragsingsfactor

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^{*2}}} \quad . \quad (2.5.3)$$

De tijdvertragsingsfactor γ wordt oneindig als $V \rightarrow c$ de lichtsnelheid benadert. De transformatieformules (2.5.1) en (2.5.2) geven de Lorentz-transformatie van ruimte en tijd.

De Lorentz-transformatie laat zich compact schrijven in matrix notatie:

$$\begin{pmatrix} t^{*'} \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma V^* \\ -\gamma V^* & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^* \\ x \end{pmatrix} \quad . \quad (2.5.4)$$

Hierdoor wordt de symmetrische vorm van de transformatie tussen ruimte en tijd pregnant naar voren gebracht.

Opgave 13

(a) Controleer dat de Lorentz-transformatie (2.5.1), (2.5.2) het ruimte-tijd interval (2.4.3) invariant laat.

(b) Laat zien dat de inverse transformatie gegeven wordt door de formules

$$x = \gamma(x' + V^* t^{*'}) \quad , \quad (2.5.5)$$

$$t^* = \gamma(t^{*'} + V^* x') \quad . \quad (2.5.6)$$

(c) Herschrijf deze formules in de vorm

$$x = x' \cosh \Theta + t^{*'} \sinh \Theta \quad , \quad (2.5.7)$$

$$t^* = x' \sinh \Theta + t^{*'} \cosh \Theta \quad , \quad (2.5.8)$$

waarin de snelheidsparameter Θ gedefinieerd wordt door $V^* = \tanh \Theta$.

Eén van de cruciale gevolgen van de Lorentz-transformatie is dat lengte en tijd slechts relatieve begrippen zijn. Dit betekent dat het resultaat van een lengtemeting af zal hangen van het Lorentz-stelsel waarin gemeten wordt. We bekijken nog eens Fig. 2.5. De meetlat AB met lengte $L_0 = x_B - x_A$ is in rust in O . In het bewegende stelsel wordt de lengte $L' = x'_{B'} - x'_{A'}$ gemeten. De Lorentz-transformatie geeft het verband

$$x'_{A'} = \gamma(x_{A'} - V t_{A'}) \quad , \quad (2.5.9)$$

$$x'_{B'} = \gamma(x_{B'} - V t_{B'}) \quad . \quad (2.5.10)$$

Waarnemer O kent aan de punten $A' = A$ en B' de ruimtelijke coördinaten $x_A = x_{A'}$, $x_B = x_{B'}$ toe. Voor hem zijn deze punten echter niet gelijktijdig

$$t_{A'} = t_A = t_B \quad , \quad (2.5.11)$$

$$t_{B'} = t_B + \frac{VL_0}{c^2} \quad . \quad (2.5.12)$$

Door aftrekken van de twee formules (2.5.9) en (2.5.10) en substitutie van (2.5.11) en (2.5.12) verkrijgen we het verwachte resultaat

$$L' = \gamma (L_0 - V^* L_0) = \gamma^{-1} L_0 \quad . \quad (2.5.13)$$

De lengte van de bewegende meetstaaf lijkt verkort met de faktor γ^{-1} in de richting van de beweging. De lengte is het grootst in het rustframe; men noemt deze lengte gewoonlijk de eigenlengte (engels: *proper length*).

Opgave 14 *Volg een analoge redenering om de tijdvertraging uit de Lorentz-transformatie af te leiden.*

De Lorentztransformatie voor drie-dimensionale beweging kunnen we nu ook opschrijven. Stel eerst dat de snelheid V langs de x -as is gericht. Dan wordt de volledige transformatie gegeven door de formules (2.5.1) en (2.5.2) aangevuld met

$$y' = y \quad , \quad (2.5.14)$$

$$z' = z \quad . \quad (2.5.15)$$

Voor een snelheid die een willekeurige richting $\hat{\mathbf{V}} = \mathbf{V}/V$ heeft, maken we nu onderscheid tussen de componenten van $\mathbf{x}$ evenwijdig en loodrecht t.o.v. $\hat{\mathbf{V}}$:

$$\mathbf{x}_{\parallel} = (\mathbf{x} \cdot \hat{\mathbf{V}}) \hat{\mathbf{V}} \quad , \quad (2.5.16)$$

$$\mathbf{x}_{\perp} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{\parallel} \quad . \quad (2.5.17)$$

Het paar formules (2.5.1) en (2.5.2) passen we toe op $\mathbf{x}_{\parallel}$, en het paar (2.5.14), (2.5.15) op $\mathbf{x}_{\perp}$:

$$\mathbf{x}'_{\parallel} = \gamma(\mathbf{x}_{\parallel} - \mathbf{V}t) \quad , \quad (2.5.18)$$

$$\mathbf{x}'_{\perp} = \mathbf{x}_{\perp} \quad , \quad (2.5.19)$$

$$t' = \gamma(t - c^{-2}|\mathbf{V}||\mathbf{x}_{\parallel}|) \quad . \quad (2.5.20)$$

Door optellen van de eerste twee formules kunnen we dit ook schrijven in de vorm

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + (\gamma - 1)\hat{\mathbf{V}}\hat{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{x} - \gamma\mathbf{V}t \quad , \quad (2.5.21)$$

$$t' = \gamma(t - c^{-2}\mathbf{V} \cdot \mathbf{x}) \quad . \quad (2.5.22)$$

Dit zijn de Lorentz-transformatieformules, afgeleid door H.A. Lorentz in 1904, in algemene vorm. Deze formules, die in de plaats van de Galilei-transformatieformules komen, hebben als fundamentele eigenschap dat het ruimte-tijd interval

$$\tau^2 = t^2 - c^{-2}|\mathbf{x}|^2 = t'^2 - c^{-2}|\mathbf{x}'|^2 = \tau'^2 \quad (2.5.23)$$

invariant is onder Lorentztransformaties. Dit heeft tot gevolg dat de lichtsnelheid invariant is in alle inertiaalstelsels.

Opgave 15

- (a) Schrijf de Lorentztransformaties (2.5.1), (2.5.2) met de tijd uitgedrukt in seconden.
- (b) Herleidt dan de Galilei-transformatie voor $V \rightarrow 0$.
- (c) Waarin verschilt een infinitesimale Lorentz-transformatie van een infinitesimale Galilei transformatie?

2.6 Optelwet voor snelheden

De klassieke optelwet voor snelheden is niet verenigbaar met de invariantie van de lichtsnelheid. Aangezien de Lorentz-transformatie de lichtsnelheid invariant laat, kunnen we verwachten dat de relativistische optelwet een oplossing biedt voor dit probleem.

We leiden de optelwet eerst af voor het geval dat de snelheid V gericht is langs de positive x -as. Dan vinden we uit (2.5.5) en (2.5.6)

$$\frac{\Delta x}{\Delta t^*} = \frac{\Delta x' + V^* \Delta t'^*}{\Delta t'^* + V^* \Delta x'} \quad . \quad (2.6.1)$$

Dus de optelwet voor evenwijdige snelheden wordt

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + v'^*_x V^*} \quad , \quad (2.6.2)$$

waarin v_x en v'_x de x -componenten van de snelheid van een deeltje in resp. de stelsels O en O' zijn. Hoewel de x en y -coördinaten niet transformeren is dit wel het geval met de tijd. We vinden

$$v_y = \frac{\sqrt{1 - V^{*2}}}{1 + v'^*_x V^*} v'_y \quad , \quad (2.6.3)$$

$$v_z = \frac{\sqrt{1 - V^{*2}}}{1 + v'^*_x V^*} v'_z \quad . \quad (2.6.4)$$

De bovenstaande vergelijkingen vervangen de klassieke optelwet van snelheden. We zien hieruit dat snelheden niet meer additief zijn. We zien ook dat de rol van v en V niet meer symmetrisch is. Dit is een gevolg van het feit dat Lorentztransformaties i.h.a. niet commuteren.

Opgave 16 Bewijs de gelijkheid

$$1 - v^{*2} = \frac{(1 - V^{*2})(1 - v^{*2})}{(1 - v^*_x V^*)^2} \quad . \quad (2.6.5)$$

De laatste gelijkheid maakt duidelijk hoe in de relativiteitstheorie de paradox tussen de lichtvoortplantingswet en het relativiteitsprincipe wordt opgelost. Samenstelling van snelheden $v = c$ en $V < c$ geeft $v' = c$. Bovendien volgt dat de samenstelling van twee snelheden kleiner dan de lichtsnelheid, altijd een snelheid geeft die ook kleiner is dan de lichtsnelheid, want dan geldt:

$$(1 - v_x^* V^*)^2 \geq (1 - v^* V^*)^2 \geq (1 - V^{*2})(1 - v^{*2}) \quad . \quad (2.6.6)$$

Het is dus onmogelijk meerdere Lorentztransformaties te combineren tot één die correspondeert met een snelheid groter dan c .

Opgave 17 Laat zien dat de optelwet van snelheden te schrijven is als

$$\theta_x = \theta'_x + \Theta \quad (2.6.7)$$

in termen van de snelheidsparameters $v_x^* = \tanh \theta_x$, $v_x^{*'} = \tanh \theta'_x$ en $V^* = \tanh \Theta$.

Opgave 18 Uit (2.5.21) laat zich een meer algemene formule afleiden:

$$\mathbf{v}' = \frac{1}{1 - \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{V}^*} \left\{ \gamma^{-1} \mathbf{v} + [(1 - \gamma^{-1}) \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{V}^*}{V^{*2}} - 1] \mathbf{V}^* \right\} \quad . \quad (2.6.8)$$

Hierin zijn $\mathbf{v}$ en $\mathbf{v}'$ de snelheden van een deeltje in twee inertiaalstelsels met relatieve snelheid $\mathbf{V}$.

Met de optelwet van snelheden kan ook het resultaat van het experiment van Fizeau begrepen worden. In dit experiment wordt de lichtsnelheid gemeten in vloeistoffen die met een eenparige snelheid t.o.v. de waarnemer bewegen. Stel de vloeistof heeft een snelheid V langs de x -as en een brekingsindex n . De snelheid van het licht t.o.v. de vloeistof is $c' = |c'_x| = c/n$. De snelheid zoals die gemeten wordt in het laboratoriumstelsel O berekenen we met de formule (2.6.2). Volgens de relativiteitstheorie is de snelheid van het licht in het laboratorium dus

$$\begin{aligned} c = |c_x| &= \frac{c' \pm V}{1 \pm c'^* V^*} \\ &= \frac{c/n \pm V}{1 \pm V^*/n} \quad . \end{aligned} \quad (2.6.9)$$

In de benadering $V^* \ll 1$ wordt dit

$$\begin{aligned} c &= \left(\frac{c}{n} \pm V \right) \left(1 \mp \frac{V^*}{n} \right) \\ &\cong \frac{c}{n} \pm V \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \quad . \end{aligned} \quad (2.6.10)$$

In de laatste stap hebben we de term V^2/n verwaarloosd. De “meesleep” coefficient $1 - 1/n^2$ beschrijft de afwijking van de klassieke optelwet, in overeenstemming met alle experimenten die zijn gedaan.

We merken hier op dat er stoffen zijn die, voor een zeker golflengtebereik, een brekingsindex $n < 1$ vertonen. Dit correspondeert met fase-snelheden groter dan c , echter alleen voor monochromatische golven met constante amplitude. Men kan echter geen signalen overbrengen met de fase-snelheid. Daarvoor moet de golf gemoduleerd worden. Men vindt dat dit altijd gebeurt met een snelheid die ten hoogste c is.

Dit brengt ons ook tot de opmerking dat ideale starre lichamen in de relativiteitstheorie niet denkbaar zijn. Transmissie-snelheden in zulke lichamen moeten in principe oneindig zijn omdat de oneindige stijfheid geen vervorming toelaat. Daarentegen kunnen in elastische media instantane vervormingen zich voortplanten als schokgolven met eindige snelheid $v < c$.

Hoofdstuk 3

Relativistische Mechanica

Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig?

Albert Einstein
1879-1955

3.1 Eigentijd

We beschouwen de baan $\mathbf{r}(t)$ van een puntdeeltje vanuit een zeker inertiaalstelsel, ook wel Lorentz-stelsel genoemd. We schetsen in Fig.3.1 de wereldlijn in de Minkowski-ruimte. Omdat de snelheid $\mathbf{v}(t) = d\mathbf{r}(t)/dt$ nooit groter kan zijn dan de lichtsnelheid, ligt de baan altijd binnen de lichtkegel die we in ieder punt van de baan kunnen construeren.

Dit gegeven kunnen we op Lorentz-invariante wijze formuleren door het ruimte-tijd interval te beschouwen dat correspondeert met twee naburige punten $\mathbf{r}(t)$ en $\mathbf{r}(t + \Delta t) = \mathbf{r}(t) + \Delta\mathbf{r}(t)$ langs de baan:

$$\Delta\tau^2 = (\Delta t)^2 - c^{-2} |\Delta\mathbf{r}(t)|^2 \quad . \quad (3.1.1)$$

Aangezien de afstand tussen twee wereldgebeurtenissen die causaal samenhangen alleen maar tijdachtig kan zijn, moeten we eisen

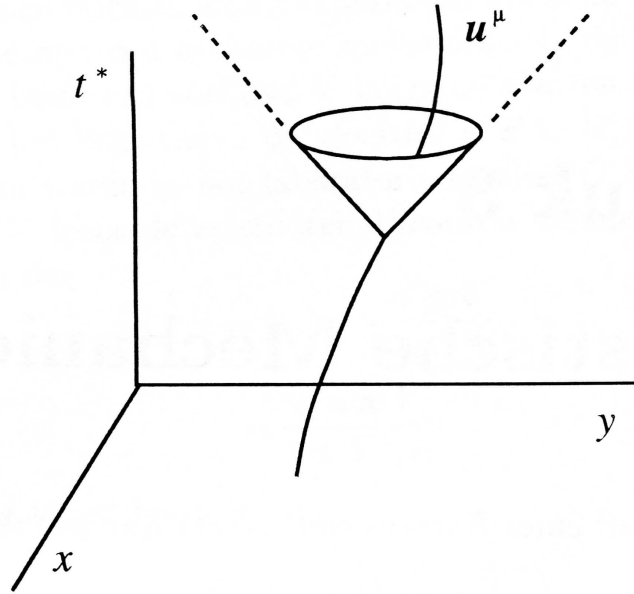
$$\Delta\tau^2 > 0 \quad . \quad (3.1.2)$$

Het deeltje moet een tijdachtige wereldlijn volgen omdat anders de volgorde waarin twee gebeurtenissen plaatsvinden geen Lorentz-invariante betekenis heeft.

Opgave 19 *Ga na dat het ruimte-tijd interval (3.1.1) een Lorentz-invariante betekenis heeft.*

Aangezien het ruimte-tijd interval (3.1.1) altijd positief is, mogen we voor een infinitesimaal interval schrijven

$$d\tau = dt\sqrt{1 - |\mathbf{v}^*(t)|^2} \quad . \quad (3.1.3)$$



Figuur 3.1: Wereldlijn van een puntdeeltje

Dit invariante interval heeft een fysische betekenis. Het is namelijk het tijdsinterval tussen twee gebeurtenissen gezien vanuit het Lorentz-stelsel waarin de momentane snelheid van het deeltje $\mathbf{v}(t) = 0$. T.g.v. de tijdsvertraging zou een klok die met het deeltje meereist dus dit tijdsinterval aanwijzen. Voor een eindig tijdsinterval tussen twee tijdstippen t_1 en t_2 definiëren we de eigentijd volgens

$$\tau_{12} = \int_1^2 d\tau = \int_1^2 dt \sqrt{1 - |\mathbf{v}^*(t)|^2} \quad . \quad (3.1.4)$$

Dit is het tijdsinterval zoals dat geregistreerd zou worden door een klok die een gegeven wereldlijn volgt. Vandaar de benaming eigen-tijd (engels: *proper time*). Voor een gegeven baan is de eigentijd τ_{12} uniek gedefinieerd. De eigentijd heeft dus een Lorentz-invariante betekenis aangezien τ_{12} voor iedere waarnemer hetzelfde is.

Opgave 20 *Wat is de eigentijd van een foton?*

I.h.a. hangt de snelheid af van de tijd zodat de meebewegende klok onderhevig zal zijn aan versnelling. Men kan zich afvragen of deze versnelling misschien ook invloed heeft op de tijdvertraging. Dit is experimenteel goed na te gaan door instabiele deeltjes, zoals muonen, in een versneller in het rond te jagen. Deze deeltjes ondergaan constant een versnelling. Niettemin vindt men steeds een levensduur die precies zo groot is als die welke uit hun snelheid moet volgen. Er is geen extra effect dat aan de versnelling van de deeltjes toegeschreven zou kunnen worden. Het negatieve resultaat wordt bevestigd door het Mössbauer-effect. Dit effect heeft

betrekking op bepaalde atoomkernen in vaste stoffen die men gammastralen laat uitzenden. De atoomkernen zijn voortdurend in trilling en ondergaan zeer aanzienlijke versnellingskrachten. De frequentie van de gammastraling kan zeer nauwkeurig worden gemeten en uit deze metingen heeft men afgeleid dat de frequentie een snelheidsafhankelijke Doppler-verschuiving vertoont die precies overeenkomt met wat de relativiteitstheorie voorspelt (zie paragraaf 3.5.3).

Het is belangrijk op te merken dat de eigentijd (3.1.4) niet alleen afhangt van de eindpunten, maar ook van de wereldlijn die deze twee punten verbindt. Beschouw nog eens de situatie in Fig.2.2. Langs het pad C blijft het deeltje in rust en dus is de eigentijd gelijk aan

$$\tau_{12}(C) = t_2 - t_1 \quad . \quad (3.1.5)$$

Echter voor het pad dat via C' loopt geldt

$$\tau_{12}(C') = \int_1^2 dt \sqrt{1 - \mathbf{v}^{*2}} < \tau_{12}(C) \quad , \quad (3.1.6)$$

aangezien $(1 - \mathbf{v}^{*2})^{1/2} \leq 1$. We zien dat de eigentijd langs een rechte lijn altijd *groter* is dan de eigentijd langs een gekromde baan.

- Als gevolg van de metriek van de Minkowski-ruimte is de eigentijdintegraal (3.1.4) maximaal als het pad tussen twee wereldpunten een rechte lijn is. In een Euclidische ruimte is een rechte lijn juist de kortste weg.

De ongelijkheid (3.1.6) geeft ook de verklaring voor de tweelingparadox. Aangezien de ruimtereiziger een pad volgt zoals C' , zal deze bij terugkeer op aarde jonger zijn dan zijn broer die op aarde is achtergebleven.

3.2 Viersnelheid

Voor een gegeven baan $\mathbf{r}(t)$ van een puntdeeltje definiëren we bij ieder tijdstip een Lorentz-invariante eigentijd volgens

$$\tau = \int_0^t \sqrt{1 - |\mathbf{v}^*(t')|^2} dt' \quad . \quad (3.2.1)$$

Dit kunnen we zien als de booglengte langs de baan. Aangezien τ een monotoon stijgende functie is kunnen we voor de wereldlijn de volgende parameter voorstelling schrijven:

$$\begin{aligned} t &= t(\tau) \quad , \\ \mathbf{r} &= \mathbf{r}(\tau) \quad . \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

In de relativiteitstheorie is het gebruikelijk om ruimte en tijd te combineren in de viervector $\{x^\mu\} = (ct, \mathbf{x})$ waarvan de componenten gelabeld worden met een Lorentz index $\mu = 0, 1, 2, 3$. In deze notatie luidt de parametervoorstelling van de wereldlijn

$$x^\mu = r^\mu(\tau) \quad . \quad (3.2.3)$$

We definiëren nu de vier-snelheid u^μ als de afgeleide naar de parameter τ :

$$u^\mu = \frac{dr^\mu}{d\tau} \quad . \quad (3.2.4)$$

De vier componenten $\{u^\mu\} = (u^0, \mathbf{u})$ worden gegeven door

$$u^0 = \frac{cdt}{d\tau} = \frac{c}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^{*2}}} \quad , \quad (3.2.5)$$

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^{*2}}} \quad . \quad (3.2.6)$$

Deze vector $\{u^\mu\} = (\gamma c, \gamma \mathbf{v})$ geeft in ieder punt de richting van de wereldlijn in de Minkowski-ruimte.

Opgave 21 Geef de componenten van u^μ in de limiet $\mathbf{v} \rightarrow 0$.

In analogie met het Lorentz-invariante ruimte-tijdinterval (3.1.1), definieert men voor iedere willekeurige viervector a^μ de Minkowski-norm

$$a^2 = (a^0)^2 - \mathbf{a}^2 \quad , \quad (3.2.7)$$

en meer algemeen het Minkowski-inproduct

$$a \cdot b = a^0 b^0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad (3.2.8)$$

tussen twee viervectoren a^μ en b^μ . Men kan bewijzen dat dit inproduct een Lorentz-invariante betekenis heeft; zie Opgave 19. In tegenstelling tot het Euclidische inproduct, is het Minkowski-inproduct indefinit, d.w.z. de norm kan positief zijn (tijdachtig), negatief (ruimteachtig), of nul. De norm van de viersnelheid berekenen we als

$$u^2 = (u^0)^2 - \mathbf{u}^2 = c^2 \quad . \quad (3.2.9)$$

De raakvector is dus tijdachtig, in overeenstemming met de causaliteitseis dat een materieel deeltje een tijdachtige wereldlijn moet volgen.

Hoewel de viersnelheid u^μ dezelfde informatie bevat als de gewone drie-snelheid $\mathbf{v}$, heeft u^μ een eenvoudig linear transformatiegedrag onder Lorentz-transformaties, in tegenstelling tot $\mathbf{v}$. Door differentiatie naar de invariante parameter τ vinden we uit (2.5.21) en (2.5.22) de transformatieformules

$$u'^0 = \gamma (u^0 - \mathbf{V}^* \cdot \mathbf{u}) \quad , \quad (3.2.10)$$

$$\mathbf{u}' = \Omega^{-1} \cdot \mathbf{u} - \gamma \mathbf{V}^* u^0 \quad . \quad (3.2.11)$$

De matrix in de laatste formule is gedefinieerd als

$$\Omega^{-1} = \mathbf{1} + (\gamma - 1) \frac{\mathbf{V}\mathbf{V}}{|\mathbf{V}|^2} \quad . \quad (3.2.12)$$

De viersnelheid transformeert dus lineair, en wel volgens een Lorentz-transformatie. M.a.w. de transformatieformule is dezelfde als die voor de ruimte-tijdcoördinaten. Een grootheid met deze eigenschap noemt men een viervector. Dat de viersnelheid een viervector is volgt ook direct uit definitie (3.2.4), en het feit dat differentiatie naar τ commuteert met de Lorentz-transformatie.

Opgave 22 *Controleer expliciet dat de norm (3.2.9) invariant is onder een Lorentz-transformatie. Bekijk voor de eenvoud het één-dimensionale geval.*

Op analoge wijze kan men de vierversnelling definiëren als de afgeleide van de viersnelheid naar de eigentijd

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = \dot{u}^\mu \quad . \quad (3.2.13)$$

Ook deze grootheid is een viervector maar, in tegenstelling tot u^μ , is de vierversnelling a^μ een ruimteachtige vector.

Opgave 23

(a) *Ga na dat a^μ en u^μ orthogonaal zijn binnen het inproduct (3.2.7) :*

$$a \cdot u = 0 \quad . \quad (3.2.14)$$

(b) *Voer de tijddifferentiatie uit en bewijs*

$$\dot{u}^0 = \frac{\mathbf{v}^* \cdot \mathbf{a}}{(1 - \mathbf{v}^{*2})^2} \quad , \quad (3.2.15)$$

$$\dot{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{a}}{1 - \mathbf{v}^{*2}} + \frac{\mathbf{v}^*(\mathbf{v}^* \cdot \mathbf{a})}{(1 - \mathbf{v}^{*2})^2} \quad , \quad (3.2.16)$$

met $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ de gewone versnelling.

(c) *Bewijs dat a^μ een ruimteachtige vector is.*

3.3 Vierimpuls

In de klassieke mechanica van Newton is impuls gedefinieerd als $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. Anderzijds, kunnen we ook de hierboven besproken viersnelheid vermenigvuldigen met de massa. Dit definieert de vier-impuls

$$p^\mu = mu^\mu \quad (3.3.1)$$

met de componenten

$$p^0 = \frac{mc}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^{*2}}} \quad , \quad (3.3.2)$$

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^{*2}}} \quad . \quad (3.3.3)$$

Voor lage snelheden valt de definitie van de relativistische impuls (3.3.3) samen met die van de klassieke impuls. Voor snelheden dicht bij de lichtsnelheid daarentegen, gaat de relativistische impuls drastisch verschillen.

Opgave 24

(a) Ga na dat het verband tussen relativistische impuls en snelheid is

$$\mathbf{v} = \frac{c\mathbf{p}}{p^0} . \quad (3.3.4)$$

(b) Laat zien dat in de non-relativistische limiet

$$cp^0 = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + O(v^4) . \quad (3.3.5)$$

(c) Geef een relativistische definitie voor de kinetische energie van een deeltje.

In de relativistische theorie moeten we onderscheid maken tussen de massa van een deeltje in rust en de relativistische massa

$$m(v) = \frac{m}{\sqrt{1 - v^{*2}}} \quad (3.3.6)$$

van een bewegend deeltje. De massa $m(0) = m$ heet de rustmassa. Deze massa is een intrinsieke maat voor de traagheid van een deeltje. Voor zover we weten, staat deze eigenschap los van de eigenschappen van ruimte en tijd. We zullen daarom de rustmassa van een deeltje beschouwen als een Lorentz-invariante grootte. We kunnen dan opmerken dat de viervector (3.3.1) de invariante norm

$$p^2 = p^{02} - \mathbf{p}^2 = m^2c^2 \quad (3.3.7)$$

heeft. Men noemt dit de massaschilrelatie. Massaloze deeltjes worden gekarakteriseerd door de relatie $p^2 = 0$.

Opgave 25

(a) Bereken het verband

$$p^0 = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2c^2} . \quad (3.3.8)$$

(b) Geef de uitdrukking voor de non-relativistische limiet. Wat is hier de expansieparameter?

(c) Beschouw de ultra-relativistische limiet, en vergelijk deze met de oplossing van de nul-vergelijking $p^2 = 0$.

We zullen nu laten zien dat de wet van impulsbehoud slechts in overeenstemming te brengen is met het relativiteitsprincipe, indien we formules (3.3.2) en (3.3.3) aanvaarden als de uitdrukkingen voor de energie cp^0 en impuls $\mathbf{p}$ van een relativistisch deeltje. We merken eerst op dat onder een Lorentz-transformatie de componenten van de vier-impuls $\{p^\mu\} = (m\gamma c, m\gamma\mathbf{v})$ transformeren volgens

$$p'^0 = \gamma(p^0 - \mathbf{V}^* \cdot \mathbf{p}) , \quad (3.3.9)$$

$$\mathbf{p}' = \Omega^{-1} \cdot \mathbf{p} - \gamma \mathbf{V}^* p^0 \quad , \quad (3.3.10)$$

hetgeen direct volgt uit (3.2.10) en (3.2.11). De vier componenten transformeren dus onder elkaar. Als de impuls $\mathbf{p}$ behouden is in de tijd, dan geldt dat ook voor p^0 , en is de viervector p^μ behouden in ieder Lorentz-stelsel.

We leggen nu op dat de som van de impulsen van een systeem van deeltjes waarop geen externe krachten werken voldoet aan de behoudswet

$$\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i = \text{const.} \quad (3.3.11)$$

Deze wet moet ook gelden in ieder ander Lorentz stelsel:

$$\mathbf{P}' = \sum_i \mathbf{p}'_i = \text{const}' \quad . \quad (3.3.12)$$

De twee constanten zullen i.h.a. verschillende waarden hebben in verschillende Lorentz-stelsels. Voor een systeem van één deeltje valt uit de eis van Lorentz-covariantie niets te concluderen aangezien een snelheid die constant is in één Lorentz-frame dat ook is in alle andere. De traagheidswet is dus invariant onder Lorentz-transformaties.

Voor twee of meer deeltjes volgt echter dat de impuls lineair moet transformeren, opdat (3.3.12) geldt. De relativistische impuls voldoet aan deze eis. Ook de totale vier-impuls transformeert volgens de Lorentz-transformatie (3.3.9) en (3.3.10) :

$$P'^0 = \gamma (P^0 - \mathbf{V}^* \cdot \mathbf{P}) \quad , \quad (3.3.13)$$

$$\mathbf{P}' = \Omega^{-1} \cdot \mathbf{P} - \gamma \mathbf{V}^* P^0 \quad . \quad (3.3.14)$$

In deze transformatie zijn alle vier de componenten van de totale vier-impuls

$$P^\mu = \sum_i p_i^\mu \quad (3.3.15)$$

betrokken. Als dus voldaan moet zijn aan impulsbehoud in ieder Lorentz-frame, dan moet ook de vierde component

$$P^0 = \sum_i \frac{m_i c}{\sqrt{1 - \mathbf{v}_i^2}} \quad (3.3.16)$$

behouden zijn. Kennelijk bestaat in de relativiteitstheorie geen impulsbehoud zonder energiebehoud. Dit is een direct gevolg van het transformatiegedrag van de energie-impuls P^μ als een vier-vector. Energie en impulsbehoud geven uitdrukking aan de homogeniteit van tijd en ruimte. In de relativiteitstheorie zijn ruimte en tijd intrinsiek met elkaar verbonden, en zo ook energie en impuls.

Opgave 26

- (a) *Beredeneer dat er altijd een Lorentz-frame bestaat waarin $\mathbf{P} = 0$.*
- (b) *Geef de transformatieformules voor P^μ vanuit dit Lorentz-frame.*
- (c) *Geef een definitie voor de totale massa.*

3.4 Energie en massa

In de paragraaf hierboven kwamen we reeds tot de conclusie dat $\varepsilon = cp^0$ de energie van een relativistisch deeltje moet zijn. Dit volgt ook als we de verandering in de tijd van de energie, gegeven door (3.3.2), berekenen. Na enig rekenwerk vinden we

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = mc^2 \frac{d\gamma}{dt} = \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad . \quad (3.4.1)$$

Als we nu de kracht definiëren als de tijdafgeleide van de impuls, zoals in de Newtonse theorie, dan is de toename van de energie gelijk aan de verrichte arbeid op het systeem

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} \quad . \quad (3.4.2)$$

Dit is niet anders dan in de klassieke mechanica, hetgeen bevestigt dat ε inderdaad de energie is.

In de limiet dat het deeltje in rust is, reduceert de energie tot een constante, zie Opgave 24:

$$\varepsilon_0 = \lim_{\mathbf{v} \rightarrow 0} \varepsilon = mc^2 \quad . \quad (3.4.3)$$

Vandaar de naam rustenergie voor mc^2 . Deze constante bijdrage aan de energie kan niet weggelaten worden zonder het vier-vector karakter van p^μ te verstoren. De rustenergie is dus niet nul. Er is echter geen strijdigheid met de klassieke mechanica omdat energie slechts bepaald is op een constante na. Ook de wet van behoud van energie verandert niet als deze constante bij de energie wordt opgeteld. De numerieke waarde hiervan is enorm groot voor een klassieke lichaam in vergelijking met de kinetische energie. Om een voorbeeld te geven, 2500 KWh is equivalent met slechts 10^{-4} g. Voor alle fysische processen waarin massa behouden is, zal deze grote additieve constante echter niet waarneembaar zijn.

Opgave 27

(a) Laat zien dat de Lorentz-transformatie voor de vier-impuls reduceert tot

$$\varepsilon' = \varepsilon - \mathbf{V} \cdot \mathbf{p} + \frac{1}{2} m V^2 \quad , \quad (3.4.4)$$

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} - m\mathbf{V} \quad , \quad (3.4.5)$$

in de klassieke limiet.

(b) Uit de afleiding volgt dat slechts voldaan wordt aan de klassieke optelwet van snelheden als ε de rustmassa bevat. Ga dit na.

De Einstein-relatie “ $E = mc^2$ ” voor de rustenergie berust op het algemeen gedrag van de energie onder Lorentz-transformaties. In deze redenering speelt het karakter van de deeltjes, elementair of samengesteld, geen rol. De relatie geldt ook als het systeem bestaat uit veel deeltjes. De massa is dan de totale rustmassa M van het

systeem. Deze totale rustmassa is gedefinieerd als de norm van de totale energie-impuls vier-vector (3.3.15), met componenten $\{P^\mu\} = \{E/c, \mathbf{P}\}$. Het is eenvoudig in te zien dat de som van twee tijdachtige vectoren met positieve tijdcomponenten weer tijdachtig is. Ook P^μ heeft dus een positieve norm

$$P^2 = c^{-2}E^2 - \mathbf{P}^2 = M^2c^2 \quad (3.4.6)$$

die de rustmassa van het systeem geeft. De rustmassa kan berekend worden in het Lorentz-stelsel waarin het ruimtelijk gedeelte van de energie-impuls vector nul is: $\mathbf{P} = 0$. Op grond van het tijdachtige karakter van P^μ kan zo'n stelsel altijd gevonden worden. In de klassieke mechanica noemt men dit het zwaartepuntstelsel. De engelse benaming '*Centre-of-momentum frame*' is echter juist. In dit stelsel wordt de rustmassa gegeven door de betrekking

$$Mc^2 = \bar{E} \quad . \quad (3.4.7)$$

De aanduiding $\bar{E}$ geeft aan dat het de energie in het zwaartepuntstelsel betreft. Men noemt de rustmassa M ook wel de invariante massa. Voor een stelsel van deeltjes geldt

$$M = \sum_i \frac{m_i}{\sqrt{1 - \bar{v}_i^{*2}}} \neq \sum_i m_i \quad . \quad (3.4.8)$$

De rustenergie bevat dus ook de kinetische energie van de deeltjes met snelheden $\bar{v}_i$ gemeten t.o.v. het zwaartepuntstelsel. M.a.w., de rustenergie omvat alle interne energie bijdragen, zoals kinetische energie, de interactie energie, de thermische energie, de bindingsenergie, etc. Als de interne energie toeneemt, dan ook de rustmassa. B.v. een atoom in een aangeslagen toestand is zwaarder dan datzelfde atoom in de grondtoestand.

Opgave 28

(a) *Bewijs dat de som van twee tijdachtige vectoren met positieve tijdcomponenten weer tijdachtig is.*

(b) *Bewijs het verband*

$$E^2 = \bar{E}^2 + \mathbf{P}^2c^2 \quad . \quad (3.4.9)$$

(c) *Bewijs dat voor het geval van twee deeltjes de invariante massa gegeven wordt door*

$$M^2 = m_1^2 + m_2^2 + \frac{2m_1m_2}{\sqrt{1 - w^{*2}}} \quad , \quad (3.4.10)$$

waarin $\mathbf{w}$ de onderlinge snelheid van de deeltjes is.

De equivalentie van massa en energie was een van de belangrijkste voorspellingen van de relativiteitstheorie. Maar het is onjuist te stellen dat massa en energie feitelijk hetzelfde zijn. De energie is een behouden grootheid die afhangt van het Lorentz-frame. Beter gezegd, energie is de tijdcomponent van een behouden vier-vector; zie (3.3.16). De rustmassa daarentegen is een invariante maat voor traagheid,

gedefinieerd in (3.4.6) als de norm van de energieimpuls vier-vector. Alleen in het zwaartepuntstelsel zijn deze grootheden numeriek evenredig; zie (3.4.7).

De totale rustmassa M is behouden op grond van energie en impulsbehoud. In de relativiteitstheorie is er geen aparte behoudswet voor de rustmassa van individuele deeltjes, maar slechts voor de totale energie (3.3.16) die ook de rustmassa van de deeltjes omvat:

$$E = \sum_i m_i c^2 + \sum_i T_i \quad , \quad (3.4.11)$$

met T_i de kinetische energie

$$T_i = \frac{m_i c^2}{\sqrt{1 - v_i^{*2}}} - m_i c^2 \quad . \quad (3.4.12)$$

In botsingen kunnen dus deeltjes overgaan in andere deeltjes met een verschillende rustmassa, zoals in het annihilatieproces $e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma$. De totale energie (3.4.11) blijft daarbij gelijk. De rustmassa kan dus omgezet worden in andere vormen van energie, zoals kinetische energie.

Een gebonden systeem, zoals een atoomkern bestaande uit meerdere deeltjes, heeft een zekere bindingsenergie. Deze bindingsenergie is evenredig met het massaverschil tussen de rustmassa's van de individuele deeltjes en de rustmassa van het systeem als geheel:

$$\Delta E = \sum_i m_i c^2 - M c^2 = \Delta M c^2 \quad . \quad (3.4.13)$$

Het massaverschil moet positief zijn:

$$\sum_i m_i > M \quad , \quad (3.4.14)$$

opdat het systeem stabiel is. Een spontaan verval in individuele deeltjes met massa m_i is dan niet mogelijk. Men moet daarvoor tenminste een energie ΔE investeren. Een kern met een positief massadefect $\Delta M > 0$ kan echter wel vervallen in lichtere kernen met massa's M_i , mits de som van de massadefecten groter is dan het oorspronkelijke massadefect

$$\sum_i \Delta M_i > \Delta M \quad . \quad (3.4.15)$$

Bijvoorbeeld de kern ${}^8_4\text{Be}$ kan spontaan vervallen in twee α -deeltjes ${}^4_2\text{He}$, maar niet in vrije protonen en neutronen.

In kernfusie vindt het omgekeerde proces plaats. Daarin worden via een reeks van reacties heliumkernen ${}^4\text{He}$ gevormd door de fusie van waterstofkernen ${}^2\text{H}$. Deze reactie is verantwoordelijk voor de lange levensduur van sterren zoals de zon. Het relatieve massadefect $\Delta M/M$ bij dit soort kernprocessen is van de orde van 1%.

Een zeer groot massadefect kan optreden bij de vorming van sterren t.g.v. de aantrekkende zwaartekracht. Bij voorbeeld, bij de vorming van neutronensterren kan de bindingsenergie tot 30% van de totale rustenergie bedragen. Tijdens de afkoelingsfase wordt deze energie weggestraald in de vorm van neutrinos en fotonen.

In alle boven besproken voorbeelden is energie steeds behouden, en ook de rustmassa van het systeem als geheel. Er is in de relativiteitstheorie geen behoudswet voor rustmassa zoals in de klassieke mechanica. Hoewel massa en energie niet hetzelfde zijn kan massa wel omgezet worden in vormen van energie.

3.5 Toepassingen

3.5.1 Drempelenergie

Stel we willen weten wat de minimale kinetische energie is die aan een proton moet worden gegeven opdat de volgende reactie kan optreden

$$p + p \rightarrow p + p + \pi^0 \quad , \quad (3.5.1)$$

waarbij een pion vrijkomt. Het andere proton is bij aanvang van het experiment in rust in het laboratoriumstelsel (L-stelsel). In het zwaartepuntstelsel (CM-stelsel) kan aan impulsbehoud worden voldaan als geen der eindproducten nog kinetische energie heeft. In dat geval wordt alle kinetische energie die de twee protonen vóór de botsing hebben, gebruikt voor de creatie van het pion. De energie die hiervoor beschikbaar moet zijn volgt uit de conditie

$$M \geq m_\pi + 2m_p \quad . \quad (3.5.2)$$

We berekenen de invariante massa M in het L-stelsel. In dit stelsel heeft het ene proton een energie-impuls $p_1^\mu = (\varepsilon/c, \mathbf{p}_1)$ en het target proton $p_2^\mu = (m_p c, 0)$. Dus voor de norm volgt

$$M^2 c^2 = (p_1 + p_2)^2 = 2m_p^2 c^2 + 2m_p \varepsilon_1 \quad . \quad (3.5.3)$$

De ongelijkheid (3.5.2) wordt hiermee

$$2m_p^2 c^2 + 2m_p \varepsilon_1 \geq (m_\pi c + 2m_p c)^2 \quad . \quad (3.5.4)$$

Uitwerken hiervan geeft het resultaat

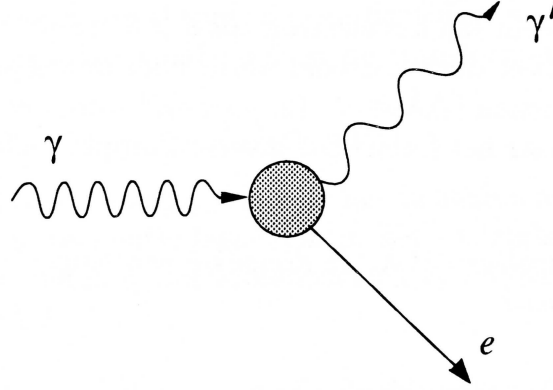
$$T_1 = \varepsilon_1 - m_p c^2 \geq \frac{4m_p m_\pi + m_\pi^2}{2m_p} c^2 \simeq 0.3 m_p c^2 \quad . \quad (3.5.5)$$

Dit is de minimale kinetische energie die het proton moet hebben om de reactie op gang te brengen. De afchatting volgt uit de benadering $m_\pi \simeq m_p/7$.

Opgave 29 *Beschouw een botsing tussen twee deeltjes met massa's m_1 en m_2 waarbij aanvankelijk het tweede deeltje in rust is. Bereken dat de minimale kinetische energie gegeven wordt door*

$$T_1 = c^2 \frac{M_{\min}^2 - (m_1 + m_2)^2}{2m_2} \quad , \quad (3.5.6)$$

waarin $M_{\min}$ de minimale invariante rustmassa van de eindproducten is.



Figuur 3.2: Comptonverstrooiing

3.5.2 Comptonverstrooiing

Het foton is een deeltje dat beweegt met snelheid c in alle Lorentz-stelsels. Dit kan alleen het geval zijn als de rustmassa nul is. Anders gezegd, de energie-impuls-relatie voor een foton luidt

$$\varepsilon = c|\mathbf{p}| \quad . \quad (3.5.7)$$

De vierimpuls wordt dus volledig gekarakteriseerd door de energie ε en de richting $\hat{\mathbf{p}}$ van de impuls

$$\{cp^\mu\} = (\varepsilon, \varepsilon\hat{\mathbf{p}}) \quad . \quad (3.5.8)$$

Merk op dat voor een massaloos deeltje zoals het foton de viersnelheid, als gedefinieerd in (3.2.4), niet bestaat. Andere massaloze deeltjes zijn het neutrino (dat mogelijkwerwijs toch een massa van 17KeV of minder heeft) en het graviton. Men noemt dergelijke deeltjes ook wel nul-deeltjes.

Stel nu dat een foton met een zekere energie verstrooid wordt aan een electron dat aanvankelijk in rust is. De behoudswetten voor energie en impuls luiden

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}' + \mathbf{p}'_e \quad , \quad (3.5.9)$$

$$c|\mathbf{p}| + m_e c^2 = c|\mathbf{p}'| + \varepsilon'_e \quad . \quad (3.5.10)$$

Hierin zijn $\mathbf{p}$ en $\mathbf{p}'$ de impuls van het foton vóór en na de botsing. Verder zijn $\mathbf{p}'_e$ en

$$\varepsilon'_e = \sqrt{|\mathbf{p}'_e|^2 c^2 + m_e^2 c^4} \quad (3.5.11)$$

de impuls en energie van het teruggestoten electron.

We berekenen de kwadraten van (3.5.9) en (3.5.10) als

$$\mathbf{p}^2 - 2\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' + \mathbf{p}'^2 = \mathbf{p}'_e{}^2 \quad , \quad (3.5.12)$$

$$c^2 (|\mathbf{p}| - |\mathbf{p}'|)^2 = (\varepsilon'_e - m_e c^2)^2 \quad . \quad (3.5.13)$$

We schrijven $\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}' = |\mathbf{p}| |\mathbf{p}'| \cos \theta$, met θ de verstrooiingshoek. Vervolgens trekken we (3.5.12) af van (3.5.13). Dit levert:

$$|\mathbf{p}| |\mathbf{p}'| (\cos \theta - 1) + m_e c (|\mathbf{p}| - |\mathbf{p}'|) = 0 \quad . \quad (3.5.14)$$

We gebruiken nu de De Broglie-relaties tussen impuls en golflengte λ van het foton

$$|\mathbf{p}| = \frac{h}{\lambda} \quad |\mathbf{p}'| = \frac{h}{\lambda'} \quad (3.5.15)$$

om (3.5.14) te schrijven als

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta) \quad . \quad (3.5.16)$$

Deze formule (H.A. Compton, 1922) geeft de golflengteverschuiving $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ die het gevolg is van verstrooiing aan een electron. De verschuiving hangt af van de verstrooiingshoek en de massa van het verstrooiende deeltje, maar niet van de golflengte van het invallende licht, in overeenstemming met het experiment. De maximale verschuiving is twee maal

$$\lambda_c = \frac{h}{m_e c} = 2.4 \times 10^{-10} \text{ cm} \quad . \quad (3.5.17)$$

Deze lengte wordt de Compton-golflengte van het electron genoemd. Door meting van λ_c kan men de Planckse constante bepalen. Het effect is het best waarneembaar als de golflengte van de invallende straling vergelijkbaar is met λ_c , dus voor harde Röntgen-straling of gammastraling.

In het ruststelsel van het electron, als $\theta \neq 0$, neemt de golflengte altijd toe ($\Delta\lambda > 0$). Als licht echter verstrooid wordt door bewegende electronen, kan de golflengte ook afnemen ($\Delta\lambda < 0$). In dat geval wordt er energie overgedragen van het electron naar het foton. Dit inverse Compton effect is astrofysisch van belang.

Opgave 30 Controleer dat λ_c de dimensie van lengte heeft. Kun je een fysische betekenis geven?

3.5.3 Dopplerverschuiving

Volgens de quantumhypothese van Planck heeft een foton een energie $\varepsilon = \hbar\omega$. Verder kennen we de De Broglie-relatie $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ tussen impuls en golfgetal $\mathbf{k}$. Deze relaties moeten gelden in ieder Lorentz-stelsel. Aangezien $\hbar$ een universele constante is, kunnen we niet anders concluderen dan dat hoekfrequentie en golfvector een vier-vector vormen

$$\{k^\mu\} = (\omega/c, \mathbf{k}) \quad . \quad (3.5.18)$$

Net als $p^\mu = \hbar k^\mu$ is k^μ een nul-vector:

$$k^2 = c^{-2}\omega^2 - \mathbf{k}^2 = 0 \quad . \quad (3.5.19)$$

Dit is een gevolg van het feit dat electromagnetische golven zich voortplanten met de lichtsnelheid.

De transformatie-eigenschappen van de golf-vier-vector (3.5.18) voorspellen een tweetal verschijnselen die ook experimenteel bevestigd zijn, namelijk de relativistische correctie op het longitudinale Doppler-effect en het relativistische transversale Doppler-effect. Stel een lichtbron beweegt met snelheid V in de richting van de positieve x -as van het Lorentz-stelsel O . Dan gelden de transformatieformules

$$\omega = \gamma(\omega' + V k'_x) \quad , \quad (3.5.20)$$

$$k_x = \gamma(k'_x + V \omega' / c^2) \quad , \quad (3.5.21)$$

$$k_y = k'_y \quad , \quad (3.5.22)$$

$$k_z = k'_z \quad . \quad (3.5.23)$$

Stel nu $ck'_x = \pm\omega'$, $k'_y = 0$, $k'_z = 0$ dan vinden we voor de frequentie van het licht in O' :

$$\omega = \frac{\omega'(1 \pm V^*)}{\sqrt{1 - V^{*2}}} \quad . \quad (3.5.24)$$

We herkennen hierin de k -factor (2.3.5). De formule voor de longitudinale Doppler-verschuiving is van eerste orde in V^* , net als de klassieke wet, met relativistische correcties gegeven door de noemer.

Een zuiver relativistisch effect is de transversale Doppler-verschuiving. Zelfs loodrecht op de bewegingsrichting van een lichtbron is een frequentieverschuiving waar te nemen. Dit volgt door in de transformatieformules $k_x = 0$ te substitueren:

$$\omega = \omega' \sqrt{1 - V^{*2}} \quad . \quad (3.5.25)$$

Doordat de lichtbron beweegt, verloopt het lichtuitzendingsproces trager en is de waargenomen frequentie lager dan in het ruststelsel van de bron. Deze tijdvertraging is gemeten in het Mössbauer-effect, in overeenstemming met de relativistische formule.

Opgave 31 *Ga na dat het transversale Doppler-effect een direct gevolg is van tijddilatatie.*