

Inleiding
tot de
Theoretische Stromingsleer

Ch.G. van Weert
Instituut voor Theoretische Fysica
Valckenierstraat 65
1018 XE Amsterdam

COLLEGEJAAR 1990/1991

Literatuur

- A.L. Fetter en J.D. Walecka,
Theoretical Mechanics of Particles and Continua,
McGraw-Hill 1980.

Onmisbaar vervolg op de standaard cursus klassieke mechanica. Hoofdstuk 9 bestrijkt de stof behandeld in deze syllabus.
- A.R. Paterson,
A First Course in Fluid Dynamics,
Cambridge University Press 1983.

Goede algemene inleiding met een nuttig overzicht van de benodigde wiskundige hulpmiddelen.
- L.D. Landau and E.M. Lifshitz,
Fluid Mechanics,
Pergamon Press 1959.

Een veelgebruikt standaard boek. Zeer compact geschreven. Vereist een aanzienlijke natuurkundige en wiskundige voorkennis.
- D.J. Tritton,
Physical Fluid Dynamics,
Van Nostrand Reinhold Comp. 1977.

Een meer beschrijvend boek. Besteedt veel aandacht aan de experimentele zijde van de vloeistofmechanica.
- W.F. Hughes and J.A. Brighton,
Fluid Dynamics,
Mc Graw-Hill 1967.

Maakt deel uit van de bekende Schaum's outline series. Bevat een samenvatting van de belangrijkste definities en formules, ondersteund door een groot aantal uitgewerkte vraagstukken.

Inhoudsopgave

1	INLEIDING	4
1.1	Globale verkenning	4
1.2	Vloeistof- en gaseigenschappen	5
1.3	Deeltjesdichtheid	6
1.4	Deeltjesstroomdichtheid	8
2	STATICA	11
2.1	Hydrostatische druk	11
2.2	Hydrostatische evenwichtsconditie	12
2.3	Sterevenwicht	14
2.4	Druk- en spanningstensor	16
3	DYNAMICA	19
3.1	Continuïteitsvergelijking	19
3.2	Bewegingsvergelijking	21
3.3	Energievergelijking	24
3.4	Tweede hoofdwet	26
4	IDEALE VLOEISTOFFEN	29
4.1	Potentiaalstroming	29
4.2	Vergelijking van Bernoulli	31
4.3	Geluidsvoortplanting	33
4.4	Geluidsgolven	35

Hoofdstuk 1

INLEIDING

1.1 Globale verkenning

In de natuurkunde onderscheidt men vier aggregatie-toestanden waarin materie kan voorkomen: de vaste toestand, de vloeibare toestand, de gas toestand, en de plasma toestand. Een belangrijk verschil tussen vaste stoffen, enerzijds, en *vloeistoffen*, *gassen* en *plasma's*, anderzijds, is dat laatstgenoemden gemakkelijk vervormd en tot stromen gebracht kunnen worden. Daarbij behoudt een stromend vloeistof-element zijn volume maar niet zijn vorm, terwijl een gas- of plasma-element noch een vaste vorm noch een vast volume heeft. De *vloeistof-mechanica* houdt zich nu bezig met de beschrijving van stromingspatronen die kunnen ontstaan in vloeistoffen, gassen en plasma's onder invloed van krachten bij gegeven ruimtelijke begrenzingen. Gespecialiseerd op gassen spreekt men ook wel van *gas-mechanica*.

Zoals we weten bestaat materie uit een groot aantal bewegende deeltjes. Dit kunnen zijn: atomen, moleculen, ionen, electronen, en in moderne toepassingen ook neutronen (neutronenster), positronen (zeer hete astrofysische plasma's) of andere elementaire deeltjes. In een relatief klein gasvolume, zeg $10^{-15}m^3$ bij kamertemperatuur en atmosferische druk, zitten toch altijd nog $3 \cdot 10^9$ deeltjes, en in het geval van een vloeistof nog enkele ordes van grootte meer. Het is voor de beschrijving niet nodig, en trouwens ook onmogelijk, het precieze microscopische gedrag van al deze deeltjes in detail te kennen. We kunnen volstaan met een specificatie van gemiddelde eigenschappen zoals: deeltjesdichtheid n (gemiddeld aantal deeltjes per volume eenheid), druk P (gemiddelde kracht per oppervlakte eenheid), temperatuur T (gemiddelde kinetische energie), vloeistofsnelheid v (gemiddelde snelheid van de deeltjes), etc.

Deze gemiddelde grootheden beschrijven de toestand van het systeem, en heten daarom *toestandsvariabelen*.

Als een vloeistof of gas in (thermodynamisch) *evenwicht* is in een bepaald volume dan hebben de toestandsvariabelen overal in dit volume dezelfde waarde, mits er geen externe kracht op het systeem werkt. Als het systeem in een *stationaire toestand* is, b.v. een continue vloeistofstroming in een pijp, dan kunnen sommige grootheden zoals de vloeistofsnelheid afhangen van de plaats. In het meest algemene geval veranderen de toestandsvariabelen van plaats tot plaats en zijn zij bovendien

veranderlijk in de tijd. Denk aan een gasexplosie als extreem voorbeeld. Als alle vloeistofelementen in rust zijn, dan spreekt men van de *statische* toestand, en in het geval van stroming van een *dynamische* toestand. Vandaar dat de benamingen vloeistof/gas-statica en vloeistof/gas-dynamica of hydrodynamica veel gebruikt worden in plaats van de al omvattende benaming vloeistof/gas-mechanica.

Er is een nauw verband tussen vloeistof-mechanica en thermodynamica. Dit blijkt reeds uit het feit dat de toestandsvariabelen ten dele dezelfde zijn in beide theorieën. We zullen hierop nu niet ingaan, maar vermelden slechts dat dit verband berust op het *postulaat van lokaal thermodynamisch evenwicht*. Hiermee bedoelt men de veronderstelling dat een vloeistofelement, ook als dit in beweging is, opgevat kan worden als een systeem in thermodynamisch evenwicht. Later zal uit de toepassingen blijken hoe dit postulaat in de praktijk wordt gebruikt.

Hoewel de vloeistof-statica en -dynamica behoren tot de oudste gebieden van de natuurkunde wil dit niet zeggen dat de ontwikkeling van de theorie een afgesloten hoofdstuk is. Nieuwe toepassingen in de reactorfysica, plasmafysica, astrofysica, meteorologie, etc., hebben steeds nieuwe theoretische ontwikkelingen gestimuleerd. Daarbij is ook een steeds verdergaande specialisatie in deelgebieden opgetreden zoals mag blijken uit benamingen als magnetohydrodynamica, aerodynamica, quantumhydrodynamica, om er een paar te noemen. Binnen het beperkte kader van dit college kunnen deze nieuwe ontwikkelingen slechts terloops ter sprake komen. In eerste instantie zullen we ons richten op de basisbegrippen en beginselen van de klassieke vloeistofmechanica.

1.2 Vloeistof- en gaseigenschappen

We hebben al gezegd dat het een typerende eigenschap van een vloeistof is dat deze gemakkelijk aan vorm verandert, maar zich verzet tegen een verandering van volume. Bijvoorbeeld, als water wordt onderworpen aan de druk van 1000 Bar, dan verandert het volume slechts met een paar procent. Als eerste benadering kunnen we daarom veronderstellen dat een vloeistof *incompressibel* is, d.w.z. de verandering van het volume tengevolge van een druk-verandering is praktisch nul.

Als een vloeistof in contact is met een gas of vacuüm zullen een aantal atomen de vloeistof verlaten. Het zo gevormde gas noemt men gewoonlijk *damp*. Er geldt: hoe hoger de temperatuur, des te meer damp, en bij een zekere kritische temperatuur zal een vloeistof geheel in damp overgaan.

Een andere eigenschap van vloeistoffen is het optreden van *oppervlakte-spanning*. Dat wil zeggen, een vloeistofoppervlak heeft de neiging samen te trekken; denk aan waterdruppels. Dit verschijnsel is duidelijk zichtbaar als een vloeistof zich in een nauw capillair bevindt. Daarom spreekt men ook wel van capillaire kracht.

In tegenstelling tot vloeistoffen, zijn gassen en plasma's *compressibel*. Dit betekent dat in het algemeen het volume van een stromend gas afhankelijk is van de aangelegde krachten. Er zijn echter situaties waarin ook een gas zich incompressibel gedraagt, namelijk als de stromingssnelheid veel kleiner is dan de geluidssnelheid (voor lucht 330 m/s). Dan heeft een kleine vergroting van de snelheid nauwelijks invloed op het volume. Als de gassnelheden echter de geluidssnelheid overschrijden,

dan speelt de compressibiliteit een grote rol die zich o.a. uit in het optreden van *schokgolven* (de “boom” veroorzaakt door supersone vliegtuigen). De beschrijving van deze verschijnselen is een belangrijk onderdeel van de gasdynamica.

Het meest voorkomende gas op aarde is *lucht* bestaande uit stikstof (78%) en zuurstof (21%) met een bijmenging van nog een paar andere gassen. Aangezien de samenstelling van dit gas onder de meeste omstandigheden constant is, wordt lucht in de gasdynamica meestal opgevat als zijnde enkelvoudig.

Tenslotte bespreken we nog de plasma toestand. Deze ontstaat bij hoge temperaturen, $10^4 K$ of hoger, doordat t.g.v. de snelle thermische beweging electronen losgeslagen kunnen worden uit de buitenste electronenschil. Dit proces heet *ionisatie*, en het zo ontstane geïoniseerde gas bestaande uit vrije electronen en geladen atomen (ionen) noemt men een *plasma*. Als er geen neutrale atomen meer over zijn, heet het plasma volledig geïoniseerd, en als dit nog niet het geval is gedeeltelijk geïoniseerd. Het grote verschil met een gewoon gas is dat de verschillende geladen deeltjes een Coulomb-kracht op elkaar uitoefenen, d.w.z. een elektrische kracht die relatief langzaam afneemt, namelijk met de (afstand)². Daardoor hebben Coulomb-krachten een veel grotere reikwijdte dan de krachten tussen neutrale atomen, die ook van electromagnetische oorsprong zijn, maar veel sneller afnemen, namelijk met de (afstand)⁷. Dit verschil leidt tot een groot aantal nieuwe verschijnselen die later behandeld zullen worden.

1.3 Deeltjesdichtheid

Onze dagelijkse ervaring met water en lucht zijn van dien aard dat het voor de hand ligt deze stoffen op te vatten als een continuüm, d.w.z. eindeloos deelbaar in steeds kleinere porties die desalniettemin steeds de typische eigenschappen van water en lucht behouden. Toch weten we dat aan dit proces van deling een eind moet komen, namelijk als de atomaire structuur zichtbaar wordt. Zolang we ons echter beperken tot vloeistofelementen met afmetingen die vele malen groter zijn dan de onderlinge moleculaire afstand, dan kunnen we vasthouden aan het idee dat materie een continuüm vormt.

We illustreren dit aan de hand van het begrip *deeltjesdichtheid*. Daartoe beschouwen we een deelvolume ΔV dat enerzijds heel klein is t.o.v. de stromingspatronen die we willen beschrijven, maar anderzijds heel groot is t.o.v. microscopische afmetingen:

$$d^3 \lll \Delta V \lll L^3 \quad . \quad (1.3.1)$$

Hierbij is L een typische macroscopische lengte zoals de afmeting van het vat of de dikte van de buis, en d een typisch microscopische lengte, bijvoorbeeld de intermoleculaire afstand. Een volume dat voldoet aan de ongelijkheden (1.3.1) noemt men *fysisch infinitesimaal*.

Hoe groot of klein zo'n volume precies is hangt af van de specifieke situatie, maar om de gedachten te bepalen kan men denken aan een kubus met zijden van 1 micron. Onder normale omstandigheden bevat zo'n volume ongeveer 10^7 atomen, voldoende om zinvol een gemiddelde te definiëren, b.v. het gemiddelde deeltjesaantal $\overline{\Delta N}$ in

ΔV . Weliswaar verandert het werkelijke aantal deeltjes ΔN in ΔV voortdurend t.g.v. de moleculaire bewegingen, maar deze fluctuaties zijn in praktische gevallen zo klein:

$$\Delta N - \overline{\Delta N} \ll \overline{\Delta N} \quad , \quad (1.3.2)$$

dat ze volstrekt verwaarloosd mogen worden. De vloeistofmechanica berust essentieel op deze aanname.

We leggen er nogmaals de nadruk op dat deze verwaarlozing gebaseerd is op het feit dat de lengtes die gewoonlijk een rol spelen in de beschrijving van vloeistoffen en gassen, zoveel groter zijn dan de lengtes die de atomen en moleculen karakteriseren. Men moet echter bedenken dat er situaties kunnen zijn waarvoor dit niet meer opgaat, b.v. als het gas extreem verdund is, zoals in de hoogste luchtlagen, of bij metingen in het laboratorium als de materie-samples extreem klein zijn. Het is dan noodzakelijk fluctuaties in de beschrijving te betrekken. In de klassieke vloeistofmechanica worden dergelijke verfijningen echter buiten beschouwing gelaten.

Onder de boven besproken omstandigheden kunnen we voor een vloeistof of gas een gemiddelde deeltjes-dichtheid definiëren volgens

$$n = \frac{\overline{\Delta N}}{\Delta V} \quad (1.3.3)$$

met ΔV fysisch infinitesimaal. Hierbij nemen we aan dat ΔV binnen zekere grenzen gevarieerd kan worden zonder dat dit de waarde van n beïnvloedt. Anders gezegd, we nemen aan dat $\overline{\Delta N}$ rechtevenredig is met ΔV

$$\overline{\Delta N} = n \Delta V \quad (1.3.4)$$

voor alle waarden van ΔV die voldoen aan de ongelijkheden (1.3.1).

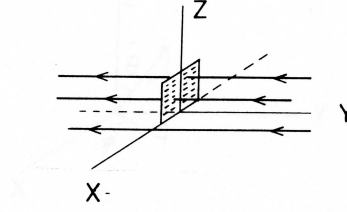
Stel we meten volgens de boven beschreven procedure de deeltjesdichtheid op een groot aantal plaatsen. Als het gas of de vloeistof uniform is, dan zullen we steeds dezelfde waarde voor n vinden. Als het systeem niet uniform is dan hangt het resultaat van de meting af van de plaatscoördinaten $\mathbf{x} = (x, y, z)$ van het punt waar de meting verricht wordt. We krijgen dan een plaatsafhankelijke deeltjesdichtheid $n = n(\mathbf{x})$ die nu een functie is van de drie plaatscoördinaten. Zulke functies noemt men *velden*. Als het meetvolume klein is t.o.v. de afstanden waarover de dichtheid varieert, dan zal het veld $n(\mathbf{x})$ een gladde functie zijn, en in de praktijk neemt men altijd aan dat de afgeleiden naar x , y en z bestaan.

Het verband met het totale aantal deeltjes in een volume V wordt verkregen door integratie. Immers we kunnen het totale deeltjesaantal N schrijven als de Riemann-som

$$N = \sum_{\Delta V} \overline{\Delta N} = \sum_{\Delta V} n \Delta V \quad . \quad (1.3.5)$$

Aangezien ΔV steeds fysisch infinitesimaal wordt genomen is de Riemann-som in zeer goede benadering gelijk aan de integraal

$$N = \int_V n(\mathbf{x}) d^3x \quad , \quad (1.3.6)$$



Figuur 1.1: Deeltjesstroom langs de x -as door een oppervlak ΔS .

met $d^3x = dx dy dz$. De overgang van (1.3.5) naar (1.3.6) wordt ook wel de *continuum-limiet* genoemd. Het bestaan van deze limiet wordt in de vloeistofmechanica als vanzelfsprekend beschouwd.

De deeltjesdichtheid is één van de belangrijkste toestandsvariabelen van de vloeistofmechanica. Vaak gebruikt men echter ook de *massadichtheid* gedefinieerd als

$$\rho(\mathbf{x}) = mn(\mathbf{x}) \quad , \quad (1.3.7)$$

met m de massa van de deeltjes. Door integratie over het volume verkrijgt men de totale massa van het systeem.

1.4 Deeltjesstroombichtheid

Om stroming in een gas of vloeistof te kunnen beschrijven moeten we het begrip deeltjesstroom invoeren. Deze grootheid, waarvoor we het symbool $\mathbf{j}$ gebruiken, heeft zowel richting als grootte, en is dus een vector-grootheid. We kiezen voor het gemak het coördinatenstelsel zodanig, dat de stroomrichting langs de x -as ligt. Laat nu ΔS een oppervlakje loodrecht op de x -as zijn en $\bar{N}(\Delta S, \Delta t)$ het gemiddelde aantal deeltjes dat ΔS passeert in een tijdinterval Δt . (Het symbool Δ geeft steeds aan dat het een fysisch infinitesimale grootheid betreft, dus klein op een macroscopische schaal, en groot op een microscopische schaal.) Dan definiëren we de *deeltjesstroom* j_x volgens

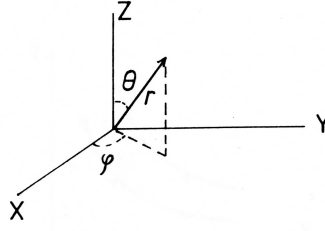
$$\bar{N}(\Delta S, \Delta t) = j_x \Delta S \Delta t \quad . \quad (1.4.1)$$

In feite is j_x een stroomdichtheid want de dimensie is: dichtheid $\times$ snelheid; zie ook formule (1.4.7). Maar kortweg spreekt men meestal van deeltjesstroom.

We vragen ons nu af hoeveel deeltjes er bij gegeven j_x zullen stromen door een oppervlak ΔS als dit oppervlak een willekeurige oriëntatie t.o.v. de x -as heeft. Deze oriëntatie leggen we vast door de richting van de normaalvector $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ loodrecht op ΔS . Hiervoor kunnen we ook $-\mathbf{n}$ kiezen; dit is om het even. In bol-coördinaten heeft de normaal de componenten

$$\mathbf{n} = (\sin \Theta \cos \varphi, \sin \Theta \sin \varphi, \cos \Theta) \quad . \quad (1.4.2)$$

Hierbij is Θ de hoek t.o.v. de z -as en φ de hoek t.o.v. de x -as.



Figuur 1.2: Bolcoördinaten.

De projectie ΔS_x van het oppervlak ΔS op het yz -vlak, loodrecht op de x -as wordt dan gegeven door

$$\Delta S_x = \sin \Theta \cos \varphi \Delta S = n_x \Delta S \quad . \quad (1.4.3)$$

Dit is het effectieve oppervlak loodrecht op de deeltjesstroom. Het gemiddelde aantal deeltjes dat door ΔS stroomt is dus

$$\overline{N}(\Delta S, \Delta t) = j_x \Delta S_x \Delta t = j_x n_x \Delta S \Delta t \quad . \quad (1.4.4)$$

Aangezien j_x langs de x -as ligt, en j_y en j_z dus nul zijn, kunnen we ook schrijven

$$\overline{N}(\Delta S, \Delta t) = \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \Delta S \Delta t \quad , \quad (1.4.5)$$

waarbij het in-product tussen twee vectoren zoals gewoonlijk is gedefinieerd volgens

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} = j_x n_x + j_y n_y + j_z n_z \quad . \quad (1.4.6)$$

Aangezien we weten dat de waarde van een in-product onafhankelijk is van het coördinatenstelsel dat we gebruiken om de coördinaten van $\mathbf{j}$ en $\mathbf{n}$ vast te leggen, geldt formule (1.4.5) algemeen voor een deeltjesstroom $\mathbf{j}$ in een willekeurige richting en een oppervlak ΔS met een willekeurige orientatie $\mathbf{n}$.

Uitgaande van de deeltjesstroom $\mathbf{j}(\mathbf{x})$, die in het algemeen een functie zal zijn van de plaats (en mogelijk ook van de tijd), wordt de zogenaamde *hydrodynamische snelheid* $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ van een vloeistof of gas gedefinieerd door

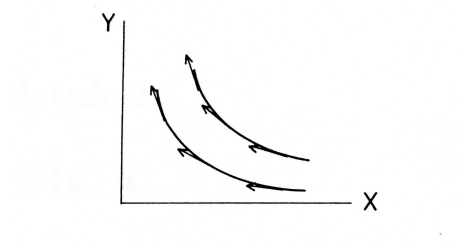
$$\mathbf{j}(\mathbf{x}) = n(\mathbf{x}) \mathbf{v}(\mathbf{x}) \quad , \quad (1.4.7)$$

met $n(\mathbf{x})$ de deeltjesdichtheid ter plaatse $\mathbf{x}$. Omdat dit een snelheid op iedere plaats in het systeem definieert, spreekt men van een *snelheids veld*. Dit veld bepaalt de *stroomlijnen* van de vloeistof via de regel dat in ieder punt $\mathbf{x}$ de raak-vector aan de stroomlijnen de richting $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ moet hebben.

Naast de deeltjesstroom voert men vaak het begrip *massastroom* in volgens

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = m \mathbf{j}(\mathbf{x}) \quad , \quad (1.4.8)$$

met m de massa van de deeltjes. De massastroom geeft de hoeveelheid massa die per tijdeenheid een loodrecht eenheidsoppervlak ter plaatse $\mathbf{x}$ passeert.



Figuur 1.3: Stroomlijnen.

Opgave 1 Controleer dat $\mathbf{j}$ een stroomdichtheid is, en dat $\mathbf{n}$ een eenheidsvector is.

Opgave 2 Overtuig jezelf ervan dat de componenten van de vector $\Delta\mathbf{S} = \mathbf{n}\Delta S$ corresponderen met de projectie van ΔS op de drie vlakken loodrecht op de drie coördinaat assen.

Opgave 3 Geef het verband tussen massastroom en hydrodynamische snelheid.

Hoofdstuk 2

STATICA

2.1 Hydrostatische druk

De *statische toestand* van een vloeistof wordt gekarakteriseerd door het feit dat alle vloeistofdelen in rust zijn t.o.v. elkaar en t.o.v. het coördinatenstelsel van waaruit we het systeem bekijken. De hydrodynamische snelheid is dus overal nul: $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0$. Zo'n toestand vereist dat er geen krachten op het systeem werken, of dat de krachten elkaar precies compenseren

$$\sum \mathbf{F} = 0 \quad . \quad (2.1.1)$$

Deze symbolische vergelijking is de grondslag voor de statica van vloeistoffen.

Teneinde vergelijking (2.1.1) toe te kunnen passen in specifieke situaties, moeten we eerst weten met welke krachten we te maken hebben. Men maakt onderscheid tussen

- (i) *volume-krachten*. Dit zijn krachten die van buiten op de individuele atomen werken.

Bijvoorbeeld: Een lichaam in een zwaartekrachtsveld ondervindt een kracht gegeven door

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g} \quad , \quad (2.1.2)$$

waarbij m de massa van het lichaam is en $\mathbf{g}$ de versnelling t.g.v. het zwaartekrachtsveld. Een fysisch infinitesimaal volume-element van een vloeistof met massa-dichtheid ρ ondervindt dus de kracht

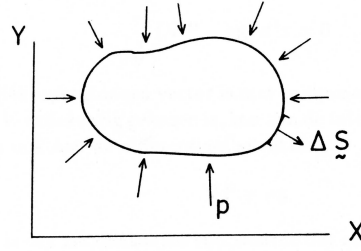
$$\mathbf{F} = (\rho \Delta^3 x) \mathbf{g} \quad . \quad (2.1.3)$$

Hierdoor ontstaat een totale kracht die evenredig is met het volume.

- (ii) *oppervlakte-krachten* die door de deeltjes zelf worden uitgeoefend binnen het medium zelf en op grensvlakken zoals de wand van het vat.

In de statische toestand is de enige oppervlaktekracht de *hydrostatische druk* P , of kortweg druk. Deze grootheid is gedefinieerd als de oppervlaktekracht per eenheid van oppervlak

$$\Delta F = P \Delta S \quad . \quad (2.1.4)$$



Figuur 2.1: Drukkraft op een vloeistofvolume.

Hierbij is ΔF de kracht uitgeoefend op een oppervlak ΔS . Het blijkt dat als de vloeistof in rust is, de druk altijd loodrecht op het beschouwde oppervlak werkt. De druk blijkt ook onafhankelijk te zijn van de oriëntatie van het oppervlak in de vloeistof. We kunnen dus schrijven:

$$\Delta \mathbf{F} = P \Delta \mathbf{S} \quad , \quad (2.1.5)$$

met $\Delta \mathbf{S} = \mathbf{n} \Delta S$ een georiënteerd oppervlakte-element dat we natuurlijk weer fysisch infinitesimaal kiezen.

2.2 Hydrostatische evenwichtsconditie

Stel we beschouwen nu een vloeistof in rust in een zwaartekrachtsveld en daarvan een willekeurig deelvolume V omsloten door een oppervlak S . De totale kracht is de optelsom van alle deelkrachten (2.1.3):

$$\mathbf{F}_V = \int_V \mathbf{g} \rho(\mathbf{x}) d^3x \quad . \quad (2.2.1)$$

Deze kracht zal de vloeistof in beweging zetten tenzij gecompenseerd door een andere kracht.

In tegenstelling tot de zwaartekracht is de druk een oppervlakte-kracht, gedefinieerd als de kracht per oppervlakte-eenheid; zie formule (2.1.5). De totale drukkraft op V vinden we dus door integratie over het totale oppervlak

$$\mathbf{F}_S = \int_S d\mathbf{F} = - \int_S P(\mathbf{x}) d\mathbf{S} \quad . \quad (2.2.2)$$

Het minteken ontstaat doordat we de normaal, die de oriëntatie van $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$ aangeeft, naar buiten gericht kiezen, dus tegengesteld aan de drukrichting. Dit is een afspraak die geen invloed heeft op het uiteindelijke resultaat.

In evenwicht moeten we de som van de twee krachten (2.2.1) en (2.2.2) optellen tot nul. We gebruiken de bekende wiskundige stelling van Gauss om de oppervlakte-integraal te vervangen door een volume-integraal. Dan krijgt de evenwichtsconditie de vorm

$$\int_V (\nabla P - \rho \mathbf{g}) d^3x = 0 \quad , \quad (2.2.3)$$

waarbij de gradiëntoperator een vector is met componenten $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$. Omdat het deelvolumen V willekeurig gekozen is, kan aan de integraalbetrekking (2.2.3) alleen voldaan zijn als ook aan de differentiaalbetrekking

$$\nabla P = \rho \mathbf{g} \quad (2.2.4)$$

voldaan is. Dit is een noodzakelijke voorwaarde dat een vloeistof of gas in *hydrostatisch (mechanisch) evenwicht* is.

Vergelijking (2.2.4) staat ons toe een aantal eenvoudige gevolgtrekkingen te maken. Ten eerste, als er geen zwaartekrachtsveld is dan geldt

$$\partial_x P = \partial_y P = \partial_z P = 0 \quad . \quad (2.2.5)$$

De druk hangt dan niet af van de plaats; we zeggen dat de druk uniform is. Ten tweede, als $\mathbf{g}$ langs de negatieve z -as gericht is dan vinden we

$$\partial_x P = \partial_y P = 0 \quad , \quad (2.2.6)$$

$$\partial_z P = -\rho g \quad . \quad (2.2.7)$$

De druk $P(z)$ is dan uitsluitend een functie van de hoogte en zo ook de massadichtheid als deze niet constant is.

We maken nu een onderscheid tussen een vloeistof die incompressibel is en een gas (b.v. de atmosfeer) waarvan de dichtheid i.h.a. niet constant genomen kan worden. In het eerste geval is de massadichtheid dus wel constant en laat zich vergelijking (2.2.7) eenvoudig integreren als we ook aannemen dat het zwaartekrachtsveld uniform is:

$$\int_1^2 dz \frac{\partial P}{\partial z} = P_2 - P_1 = -\rho g (z_2 - z_1) \quad . \quad (2.2.8)$$

Deze formule geldt alleen voor een incompressibele vloeistof.

Opgave 4 Bereken de drukkracht op ieder van de zijden van een rechthoekig vloeistofelement $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$. Laat zien dat de netto kracht in de z -richting wordt gegeven door

$$F_z = -\partial_z P \Delta V$$

en dat daaruit (2.2.7) afgeleid kan worden.

Opgave 5 We beschouwen een compressibel gas in een uniform zwaartekrachtsveld dat zowel in hydrostatisch als thermisch evenwicht is. d.w.z. de temperatuur is overal constant. Gebruik de toestandsvergelijking $P = nk_B T$ om (2.2.7) te integreren.

Opgave 6 Beschouw een lichaam met volume V dat geheel of gedeeltelijk ondergedompeld is in een vloeistofbad. Bewijs dat in een uniform zwaartekrachtsveld de totale opwaartse kracht gelijk is aan

$$\int_V \rho g d^3x = Mg \quad ,$$

met M de massa van de verplaatste vloeistof. Dit resultaat heet het principe van Archimedes.

2.3 Sterevenwicht

De boven besproken evenwichtsconditie (2.3.3) kent een groot aantal toepassingen waarvan we er één in meer detail zullen bespreken. Dit is het geval van een bolsymmetrische ster in statisch evenwicht. Zonder tegenkracht zou de ster onder invloed van zijn eigen zwaartekracht ineen storten. Voor deze tegenkracht zorgt de druk. We berekenen nu eerst de zwaartekracht uitgeoefend op een massapunt met massa m , in of buiten de ster. We schrijven deze aantrekkende kracht als

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g} = -m\nabla\Phi \quad (2.3.1)$$

met Φ de gravitatiepotentiaal

$$\Phi(\mathbf{x}) = -G \int \frac{\rho(\mathbf{x}') d^3x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (2.3.2)$$

Hierin is G de gravitatieconstante en $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ de afstand tussen de twee punten $\mathbf{x}$ en $\mathbf{x}'$.

De potentiaal is eenvoudig te berekenen voor een massadichtheid die alleen afhangt van de straal r ; zie fig. 2-2. We kiezen bolcoördinaten en schrijven

$$\Phi(R) = -G \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} \int_0^\infty \frac{\rho(r) r^2 dr d\cos\Theta d\varphi}{\sqrt{R^2 - 2rR\cos\Theta + r^2}} \quad (2.3.3)$$

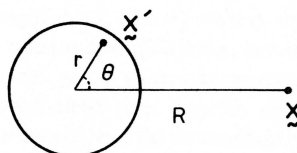
De hoekintegratie is elementair:

$$\Phi(R) = -G \int_0^\infty \left[\sqrt{(R+r)^2} - \sqrt{(R-r)^2} \right] \frac{\rho(r) 2\pi r^2 dr}{rR} \quad (2.3.4)$$

We verdelen het integratiegebied in het interval $r < R$ en $r > R$. Dan wordt het resultaat

$$\Phi(R) = -G \int_0^R \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right) \rho(r) 4\pi r^2 dr - G \int_R^\infty \rho(r) 4\pi r dr \quad (2.3.5)$$

De laatste term is onafhankelijk van R en kan eventueel weggelaten worden. Merk op dat de formule geldig is voor R binnen, dan wel buiten de ster.



Figuur 2.2: Coördinaten gebruikt bij de berekening van de zwaartekrachtspotentiaal.

In het onderhavige geval blijkt de potentiaal slechts af te hangen van de afstand tot de oorsprong. We concluderen dat de versnelling $\mathbf{g} = -\nabla\Phi$ naar de oorsprong gericht is, en ook slechts een functie van R is. Na invullen van (2.3.5) en differentiatie naar R vinden we

$$g(R) = G \frac{M(R)}{R^2} \quad (2.3.6)$$

waarbij

$$M(R) = \int_0^R \rho(r) 4\pi r^2 dr \quad (2.3.7)$$

de massa is die bevat is binnen een bol met straal R . De versnelling ter plaatse R lijkt dus te ontstaan alsof alle massa binnen deze bol geconcentreerd is in de oorsprong, en alsof alle massa buiten de bol afwezig is.

Toegepast op het binnenste van een ster vinden we uit de evenwichtsconditie (2.2.4) met (2.3.6) de balans tussen druk en zwaartekracht als

$$\frac{dP(R)}{dR} = -G \frac{\rho(R)M(R)}{R^2} \quad (2.3.8)$$

Deze vergelijking, met definitie (2.3.7), is één van de allerbelangrijkste condities waaraan een statisch stersysteem moet voldoen. Door nogmaals te differentiëren naar R kunnen we ook schrijven

$$\frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} \left(\frac{R^2}{\rho} \frac{dP}{dR} \right) = -4\pi G \rho \quad (2.3.9)$$

Als een terzijde merken we hierbij nog op dat bij de afleiding nergens verondersteld is dat de ster ook in thermisch evenwicht is. Dit heeft tot gevolg dat vergelijking (2.3.9) toepasbaar is gedurende vrijwel alle stadia van sterevolutie, behalve als er sprake is van duidelijk niet statische situaties zoals bij pulserende en exploderende sterren.

Het oplossen van vergelijking (2.3.9) vereist dat we het verband tussen druk en dichtheid, m.a.w. de toestandsvergelijking, kennen. Gezien de hoge druk in het centrum van de ster en het grote aantal kernprocessen dat bijdraagt, is dit geen geringe opgave. Vaak beschouwt men daarom model-systemen waarvoor de druk evenredig met een zekere macht van de massadichtheid toeneemt

$$P = K \rho^{1+\frac{1}{n}} \quad , \quad n \geq 0 \quad (2.3.10)$$

Stermodellen met deze toestandsvergelijking noemt men polytropen.

Opgave 7 *Ga na dat vergelijkingen (2.3.1) en (2.3.2) equivalent zijn met de gewone zwaartekrachtswet tussen twee massapunten.*

Opgave 8 *Bewijs dat de gravitatiepotentiaal voldoet aan de Poisson vergelijking*

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho$$

met $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ de Laplaciaan. Maak gebruik van

$$\Delta \frac{1}{|\mathbf{x}|} = -4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{x}) \quad .$$

Hoe bewijs je deze laatste gelijkheid?

Opgave 9 Door te vermenigvuldigen met het volume $V(R) = \frac{4}{3}\pi R^3$, kan vergelijking (2.3.8) geschreven worden als

$$VdP = -\frac{1}{3} \frac{GM}{R} dM \quad .$$

Laat zien door integratie over de hele ster dat

$$\int PdV = -\frac{1}{3}\Omega \quad ,$$

waarbij Ω de gravitationele potentiële energie van de ster is. Dit resultaat noemt men wel het viriaaltheorema.

2.4 Druk- en spanningstensor

In §1.2 hebben we de kracht uitgeoefend door de vloeistof op een oppervlakte-element $\Delta\mathbf{S} = (\Delta S_x, \Delta S_y, \Delta S_z)$ geschreven als

$$\Delta F_i = P\Delta S_i \quad . \quad (2.4.1)$$

met $i = x, y, z$. Dit berustte op het feit dat de druk in een vloeistof in rust altijd loodrecht werkt op ΔS , ongeacht de oriëntatie. De druk is dus *normaal* en *isotroop*, d.w.z. gelijk in alle richtingen. Om dit beter te begrijpen voeren we het begrip *schuifkracht* in. Dit is een kracht die werkt in het vlak van ΔS . Kies b.v. ΔS in het xy -vlak; zie fig. 2-3.

Een willekeurige schuifkracht in het vlak van ΔS kunnen we ontbinden in twee componenten

$$\Delta F_x = P_{xz}\Delta S_z \quad , \quad (2.4.2)$$

$$\Delta F_y = P_{yz}\Delta S_z \quad . \quad (2.4.3)$$

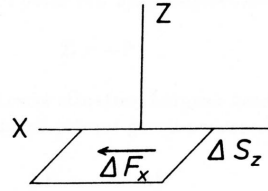
Hier is P_{xz} de kracht in de x -richting die werkt op een eenheidsoppervlak loodrecht op de z -richting, en P_{yz} de kracht in de y -richting. Met de notatie $P = P_{zz}$ kunnen we hieraan toevoegen

$$\Delta F_z = P_{zz}\Delta S_z \quad (2.4.4)$$

voor de normaalkracht op ΔS_z .

Het ligt voor de hand om de bovenstaande formules te generaliseren tot

$$\Delta F_i = \sum_j P_{ij}\Delta S_j \quad (2.4.5)$$

Figuur 2.3: Schuifkracht in de x -richting.

met $i, j = x, y, z$. In tensor notatie schrijft men

$$\Delta \mathbf{F} = \mathbf{P} \cdot \Delta \mathbf{S} \quad . \quad (2.4.6)$$

Hierin is de zogenaamde druktensor $\mathbf{P}$ een grootheid met 3×3 componenten:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} P_{xx} & P_{xy} & P_{xz} \\ P_{yx} & P_{yy} & P_{yz} \\ P_{zx} & P_{zy} & P_{zz} \end{pmatrix} \quad . \quad (2.4.7)$$

Vanwege de isotropie zijn de diagonaal elementen gelijk aan de druk: $P_{xx} = P_{yy} = P_{zz} = P$.

Als een vloeistof in rust is, moeten alle schuifkrachten noodzakelijkerwijze nul zijn omdat een vloeistof geen weerstand kan bieden aan zulke krachten zonder te bewegen. Dit betekent dat alle niet-diagonaal elementen (2.4.7) nul moeten zijn. De druktensor heeft in dit geval dus de diagonale vorm

$$\mathbf{P} = P \mathbf{I} \quad , \quad (2.4.8)$$

en is evenredig met de eenheidstensor

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad . \quad (2.4.9)$$

Substitutie in (2.4.6) geeft de oorspronkelijke formule (2.4.1) terug.

Omgekeerd mogen we ook stellen dat in dynamische situaties, d.w.z. situaties waarin de vloeistof beweegt, er in het algemeen sprake zal zijn van schuifkrachten. Dan is de druktensor dus niet diagonaal.

Ook bij een elastisch medium hebben we te maken met een niet-diagonale druktensor. Dit komt omdat een elastisch medium, in tegenstelling tot een vloeistof, wel weerstand kan bieden aan aangelegde schuifkrachten, en dus beschreven moet worden door een druktensor, of beter een *spanningstensor*

$$\Sigma = -\mathbf{P} \quad . \quad (2.4.10)$$

We beperken ons weer tot statische situaties, hetgeen betekent dat de kracht uitgeoefend op een oppervlakte-element precies gecompenseerd wordt door de daardoor opgeroepen spanning:

$$\Delta \mathbf{F} = -\Sigma \cdot \Delta \mathbf{S} \quad . \quad (2.4.11)$$

De gevolgen hiervan zullen we nu nader onderzoeken.

Stel de aangelegde kracht is weer de zwaartekracht. Dan kunnen we op analoge wijze als in §2.2 de krachtenbalans opmaken voor een willekeurig volume V . Immers de totale kracht op het oppervlak is, zie ook (2.2.2):

$$\mathbf{F}_S = \int_S \Sigma \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{t} dS \quad . \quad (2.4.12)$$

De grootheid

$$\mathbf{t} = \Sigma \cdot \mathbf{n} \quad , \quad (2.4.13)$$

die men de *spanningsvector* noemt, is de kracht per oppervlakte-eenheid op een vlak met oriëntatie $\mathbf{n}$. De totale oppervlaktespanning en de totale volumekracht (2.2.1) moeten elkaar compenseren. Toepassen van de stelling van Gauss in (2.4.12) levert dan

$$\int_V \left(\Sigma \cdot \overleftarrow{\nabla} + \rho \mathbf{g} \right) d^3x = 0 \quad . \quad (2.4.14)$$

Het nieuwe symbool in de eerste term betekent uitgeschreven in componenten $\partial_x \Sigma_{xx} + \partial_y \Sigma_{xy} + \partial_z \Sigma_{xz}$, etc. Als we de getransponeerde van een willekeurige matrix A_{ij} , $i, j = x, y, z$, invoeren volgens

$$\left(A^T \right)_{ij} = A_{ji} \quad , \quad (2.4.15)$$

dan geldt dus

$$\left(\Sigma \cdot \overleftarrow{\nabla} \right)_i = \Sigma_{ij} \overleftarrow{\partial}_j = \partial_j \left(\Sigma^T \right)_{ji} = \left(\nabla \cdot \Sigma^T \right)_i \quad . \quad (2.4.16)$$

De herhaalde index j moet gesommeerd worden over de waarden $j = x, y, z$. Dit is niet expliciet aangegeven (Einstein sommatie-conventie).

Het volume in (2.4.14) is weer willekeurig gekozen, dus moet de integrand nul zijn

$$\nabla \cdot \Sigma^T + \rho \mathbf{g} = 0 \quad . \quad (2.4.17)$$

Dit is de evenwichtsconditie voor een elastisch medium in een zwaartekrachtsveld. We kunnen dit nog iets vereenvoudigen voor het geval dat op het systeem geen uitwendig koppel wordt uitgeoefend. Men kan dan aantonen dat de spanningstensor noodzakelijkerwijze symmetrisch is

$$\Sigma = \Sigma^T \quad \text{of} \quad \Sigma_{ij} = \Sigma_{ji} \quad . \quad (2.4.18)$$

Het bewijs verloopt als dat van (2.4.14), alleen moet nu het totale koppel dat werkt op V gelijk aan nul gesteld worden.

Opgave 10 *We leggen op dat het totale koppel dat werkt op een volume nul moet zijn. Bewijs hieruit (2.4.18).*

Hoofdstuk 3

DYNAMICA

3.1 Continuïteitsvergelijking

De basiswetten van de vloeistofmechanica berusten op een zeer fundamenteel principe van de natuurkunde, namelijk het bestaan van *behoudswetten*. Zo heeft een geïsoleerd systeem een onveranderlijke impuls en energie tengevolge van de translatie-invariantie van ruimte en tijd. Verder kan een systeem nog intrinsieke behouden grootheden hebben zoals elektrische lading, deeltjesaantal, baryongetal, etc. Een niet-relativistische, niet-geladen vloeistof heeft als enige additionele behouden grootte het deeltjesaantal, hetgeen impliceert dat de massa behouden is. Tezamen met de eerder genoemde behoudswetten van energie en impuls hebben we dus in totaal vijf behoudswetten.

Hieraan moeten we nog impulsmoment-behoud toevoegen. Men kan laten zien dat voor een isotrope vloeistof deze wet zegt dat de druktensor (spanningstensor) symmetrisch is.

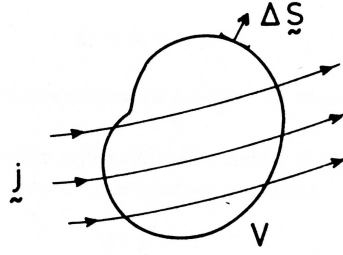
Behouden grootheden zijn belangrijk omdat ze permanente eigenschappen van een stof representeren. Neem b.v. het deeltjesaantal. Als het systeem dat we beschouwen niet uniform is dan zal het gemiddelde deeltjesaantal van punt tot punt verschillen. Een relatief overschot van deeltjes op een bepaald punt kan echter niet zomaar verdwijnen. Een verandering van de lokale deeltjesdichtheid kan alleen optreden door verplaatsing van de deeltjes. De wiskundige formulering hiervan zal ons de continuïteitsvergelijking van de vloeistofmechanica leveren.

We beschouwen de stroming van een vloeistof door een willekeurig, maar vast gekozen, deelvolumen V van de vloeistof. Men spreekt in dit verband van de Eulerse beschrijving. Als op een gegeven tijdstip t de deeltjesdichtheid in alle punten $\mathbf{x}$ gegeven is als de functie $n(t, \mathbf{x})$, dan is het totale aantal deeltjes op tijdstip t in het volume V :

$$N_V(t) = \int_V n(t, \mathbf{x}) d^3x \quad . \quad (3.1.1)$$

Een klein tijdje Δt later is dit aantal

$$N_V(t + \Delta t) = N_V(t) + \Delta t \partial_t N_V(t) + O(\Delta t^2) \quad . \quad (3.1.2)$$



Figuur 3.1: Volume V , oppervlakte element $\Delta \mathbf{S}$, en deeltjesstroom $\mathbf{j}$.

De tweede term in het rechterlid geeft de netto verandering van het deeltjesaantal voor kleine Δt . Deze verandering is gelijk aan het netto aantal deeltjes dat het volume V binnen stroomt gedurende Δt . Door de instroom te integreren over het gehele oppervlak vinden we:

$$\Delta t \partial_t N_V(t) = - \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \Delta t \quad . \quad (3.1.3)$$

Het minteken is een gevolg van het feit dat we $\Delta \mathbf{S}$ naar buiten gericht kiezen. We delen Δt weg en krijgen zo met (3.1.1) een verband tussen deeltjesdichtheid en stroom:

$$\int_V \partial_t n(t, \mathbf{x}) d^3x + \int_S \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad . \quad (3.1.4)$$

Dit is de *continuïteitsvergelijking* van de vloeistofmechanica in integraalvorm.

Ook hier kunnen we weer de stelling van Gauss gebruiken om de oppervlakte-integraal te vervangen door een volume-integraal

$$\int_V [\partial_t n(t, \mathbf{x}) + \nabla \cdot \mathbf{j}(t, \mathbf{x})] d^3x = 0 \quad . \quad (3.1.5)$$

Omdat de redenering onafhankelijk is van het gekozen volume moet ook gelden

$$\partial_t n(t, \mathbf{x}) + \nabla \cdot \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) = 0 \quad . \quad (3.1.6)$$

Dit is de continuïteitsvergelijking in differentiële vorm, die karakteristiek is voor een locale behoudswet.

De deeltjesstroom is gerelateerd aan de vloeistofsnelheid via $\mathbf{j} = n\mathbf{v}$. Substitutie in (3.1.6) geeft

$$\partial_t n + \nabla \cdot (n\mathbf{v}) = 0 \quad (3.1.7)$$

of

$$Dn + n\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad , \quad (3.1.8)$$

waarin D een afkorting is voor de volgende combinatie van ruimte- en tijd-afgeleiden:

$$D = \partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \quad . \quad (3.1.9)$$

Men noemt dit wel de *meebewogen*, of ook wel de *materiële* of *convectieve*, *afgeleide*.

Incompressibele vloeistoffen zijn gekarakteriseerd door n of ρ constant. De continuïteitsvergelijking krijgt dan de eenvoudige gedaante

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad , \quad (3.1.10)$$

hetgeen volgt uit (3.1.8) en

$$Dn = 0 \quad . \quad (3.1.11)$$

Dus, meebewegend met een vloeistofelement zien we in het geval van een incompressibele vloeistof geen verandering van de dichtheid in de onmiddellijke omgeving. Men noemt een divergentieloos stromingsveld ook wel solenoidaal.

Opgave 11 *Bezie een stationaire vloeistofstroming in een pijp. Onder welke voorwaarden laat zich uit (3.1.4) de betrekking*

$$\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2$$

afleiden? Hierbij is $\rho_{1,2}$ de massadichtheid, $v_{1,2}$ de vloeistofsnelheid, en $S_{1,2}$ de pijpdoorsnede op twee verschillende plaatsen.

Opgave 12 *Geef de continuïteitsvergelijking voor de massa dichtheid $\rho(t, \mathbf{x})$.*

Opgave 13 *Ga na dat $Dn(t, \mathbf{x})$ de totale verandering per tijdseenheid $dn(t, \mathbf{x})/dt$ van de deeltjesdichtheid is zoals gezien vanuit een meebewegend vloeistofelement. Dit gezichtspunt noemt men Lagrangiaans.*

3.2 Bewegingsvergelijking

We beginnen met de impulsbalans. Daartoe bekijken we weer een willekeurig deelvolume van de vloeistof zoals in §3.1; zie speciaal figuur 3.1. De verandering per tijdseenheid van de totale hoeveelheid impuls die vervat is in V , wordt gegeven door

$$\partial_t \int_V \rho \mathbf{v} d^3x = \int_V \partial_t (\rho \mathbf{v}) d^3x \quad . \quad (3.2.1)$$

Deze verandering wordt teweeg gebracht doordat de vloeistofstroom impuls voert en binnen brengt in V , en doordat er krachten worden uitgeoefend op V . Deze laatste vallen weer uiteen in volume-krachten van externe oorsprong en oppervlaktekrachten van interne oorsprong.

We bekijken eerst de krachten. Stel dat op V een kracht per massa-eenheid $\mathbf{g}$ werkt. Zo'n kracht is b.v. de zwaartekracht. Dan werkt op V in totaal de kracht

$$\mathbf{F} = \int_V \rho \mathbf{g} d^3x \quad . \quad (3.2.2)$$

Daarnaast zijn er de oppervlaktekrachten uitgeoefend door de drukkrachten in het systeem:

$$-\int_S P d\mathbf{S} = -\int \nabla P d^3x \quad . \quad (3.2.3)$$

Tenslotte is er de impulsstroom. Aangezien ρv_x de x -component van de impulsdichtheid is en $\mathbf{v}$ de snelheid, representeert de grootte $\rho v_x \mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{S}$ het convectieve transport van x -impuls door $\Delta \mathbf{S}$. De totale instroom van impuls door het oppervlak S van V is dus

$$-\int_S \rho v_i \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = -\int_V \nabla \cdot (\rho v_i \mathbf{v}) d^3x \quad , \quad (3.2.4)$$

waarbij de index $i = x, y, z$ staat voor de drie componenten van de impulsdichtheid.

Impulsbehoud zegt nu dat de tijdafgeleide (3.2.1) gelijk is aan de som van de drie termen (3.2.2), (3.2.3) en (3.2.4). Uitgeschreven in componenten krijgen we zo de balansvergelijking

$$\int_V \partial_t (\rho v_i) d^3x = -\int_S t_{ij} dS_j + \int_V \rho g_i d^3x \quad . \quad (3.2.5)$$

De herhaalde index j moet gesommeerd worden over de waarden $j = x, y, z$. Dit is niet expliciet aangegeven (Einstein sommatie-conventie). De grootte

$$t_{ij} = P\delta_{ij} + \rho v_i v_j \quad , \quad (3.2.6)$$

waarin δ_{ij} de Kronecker delta is, wordt wel aangeduid als de (symmetrische) impulstensor. Uit vergelijking (3.2.5) volgt dat t_{ij} de totale flux van de i -component van de impulsdichtheid is door een oppervlak met normaal in de j -richting. In een coördinaat-onafhankelijke notatie schrijven we

$$\mathbf{t} = P\mathbf{I} + \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \quad . \quad (3.2.7)$$

Deze tensor grootte heeft $n^2 = 3 \times 3$ componenten, waarvan er slechts $\frac{1}{2}n(n+1) = 6$ componenten onafhankelijk zijn vanwege de symmetrie.

Aangezien het volume willekeurig is kunnen we uit (3.2.5) ook een differentiële wet voor impulsbehoud afleiden

$$\partial_t (\rho v_i) + \partial_j t_{ij} = \rho g_i \quad . \quad (3.2.8)$$

In tensor notatie wordt dit

$$\partial_t (\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot \mathbf{t} = \rho \mathbf{g} \quad . \quad (3.2.9)$$

Deze vergelijkingen hebben de algemene vorm van continuïteitsvergelijkingen met als bronterm de externe kracht. We moeten hierbij wel opmerken dat de specifieke uitdrukking voor de impulstensor als gegeven in (3.2.6) en (3.2.7) slechts geldig is voor niet-visceuze vloeistoffen. Deze beperking kunnen we opheffen door de eerste term van (3.2.6) te generaliseren tot

$$P\delta_{ij} \longrightarrow P_{ij} = P\delta_{ij} + \mathbf{\Pi}_{ij} \quad . \quad (3.2.10)$$

De term Π_{ij} heet de *visceuze druktensor* en beschrijft het visceuze gedrag van vloeistofstroming. De impulsbehoudswet is echter ook voor visceuze en elastische media onveranderlijk van de gedaante (3.2.8) of (3.2.9).

Door gebruik te maken van een aantal vector-identiteiten kunnen we (3.2.9) verschillende, doch equivalente, vormen geven. We kunnen b.v. gebruiken

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{v} (\nabla \cdot \rho \mathbf{v}) \quad . \quad (3.2.11)$$

Vervolgens passen we in de tweede term de massa-continuïteitsvergelijking toe. Combinatie met (3.2.9) geeft dan de balansvergelijking

$$\rho D\mathbf{v} = \rho \mathbf{g} - \nabla P \quad . \quad (3.2.12)$$

met D de materiële afgeleide (3.1.9). We kunnen de laatste vergelijking, die de *Euler vergelijking* wordt genoemd, interpreteren als de bewegingsvergelijking voor een vloeistofelement, omdat zij de vorm heeft van massadichtheid $\times$ versnelling = krachtdichtheid. Met andere woorden: vergelijking (3.2.12) is de tweede wet van Newton voor een vloeistofelement van een niet-visceuze vloeistof. Een dergelijke vloeistof heet ideaal omdat schuifkrachten en viscositeit buiten beschouwing zijn gelaten. De generalisatie naar niet-ideale vloeistoffen volgt eenvoudig door in de Euler-vergelijking de substitutie (3.2.10) uit te voeren:

$$\rho D\mathbf{v} = \rho \mathbf{g} - \nabla \cdot \mathbf{P} \quad . \quad (3.2.13)$$

Dit is de meest algemene vorm voor de bewegingsvergelijking. Merk ook op dat als $D\mathbf{v} = 0$, vergelijking (3.2.12) reduceert tot de statische evenwichtsconditie.

Nog een andere vorm voor de bewegingsvergelijking krijgen we met de relatie

$$\frac{1}{2} \nabla v^2 = \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \quad , \quad (3.2.14)$$

waarin het teken $\times$ het uitproduct aangeeft. Men noemt de rotatie van het snelheidsveld

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v} \quad (3.2.15)$$

die hierin optreedt wel de *vorticititeit*. In termen van $\boldsymbol{\omega}$ kan de versnelling in de bewegingsvergelijking (3.2.12) geschreven worden als

$$D\mathbf{v} = \partial_t \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla v^2 - \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} \quad . \quad (3.2.16)$$

De laatste twee termen heten wel de *convectieve acceleratie* termen. Een stroming heet *rotatievrij* als $\boldsymbol{\omega} = 0$. Later zullen we zien onder welke omstandigheden dit het geval kan zijn.

We merken nog op dat de Euler-vergelijking een niet-lineaire partiële differentiaalvergelijking in het snelheidsveld is. Expliciete oplossing is onmogelijk, tenzij in speciale omstandigheden. Deze complicatie is de verklaring voor de veelheid van fysisch interessante verschijnselen die in vloeistoffen kunnen optreden.

Opgave 14 Schrijf vergelijking (3.2.9) uit in componenten, en vergelijk het resultaat met (3.2.8).

Opgave 15 Bewijs de identiteiten (3.2.11) en (3.2.14).

Opgave 16 Bewijs door uitschrijven in componenten de tensoridentiteiten

$$\begin{aligned}\nabla v^2 &= 2(\nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} \\ \nabla \cdot (a\mathbf{v}) &= (\mathbf{v} \cdot \nabla) a + a(\nabla \cdot \mathbf{v}) \\ \nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{v}) &= (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{v}) \\ \nabla \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}) &= (\nabla \cdot \mathbf{t}^T) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{t} : \nabla \mathbf{v} \\ \mathbf{t} : \mathbf{l} &= \text{Sp } \mathbf{t} \\ \mathbf{l} : \nabla \mathbf{v} &= \nabla \cdot \mathbf{v} \\ \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{l} &= \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v})\end{aligned}$$

De dubbele contractie tussen twee tensoren $\mathbf{A} = (A_{ij})$ en $\mathbf{B} = (B_{ij})$ betekent het spoor nemen van het matrix product $\mathbf{A} : \mathbf{B} = \text{Sp } \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_{ik} B_{ki}$.

3.3 Energievergelijking

Volgens het principe van energiebehoud kan de energie-inhoud van een willekeurig deelvolumen V van een systeem slechts veranderen als er energie wordt toe- of afgevoerd. Dit is ook de inhoud van de eerste hoofdwet van de thermodynamica. De totale energie in V :

$$\int_V \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \Phi + E \right) d^3x \quad , \quad (3.3.1)$$

bestaat uit drie bijdragen. Ten eerste, de kinetische energie van de stromende massa. Ten tweede, de potentiële energie tengevolge van een eventueel aanwezig zwaartekrachtsveld. En, ten derde, de thermodynamische inwendige energie van moleculaire oorsprong. Het is gebruikelijk om de inwendige energie per volume-eenheid E te schrijven als

$$E = \rho e \quad , \quad (3.3.2)$$

met ρ de massadichtheid. Dit definieert de *specifieke energie* e . Volgens de eerste hoofdwet verandert de energie als warmte wordt toegevoerd aan of arbeid verricht op het systeem. Bovendien kan energie in en uit V stromen. Per tijdeenheid is deze laatste bijdrage

$$- \int_S \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \Phi + \rho e \right) \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \quad . \quad (3.3.3)$$

De toegevoerde warmte drukken we uit in de warmtestroom $\mathbf{J}_q$, d.w.z. de hoeveelheid warmte die per tijdeenheid door een loodrecht eenheidsoppervlak wordt toegevoerd. Per tijdeenheid wordt dan in totaal aan V een warmtehoeveelheid

$$- \int_S \mathbf{J}_q \cdot d\mathbf{S} = - \int_V \nabla \cdot \mathbf{J}_q d^3x \quad (3.3.4)$$

toegevoegd. Tenslotte is er nog de arbeid die op het volume V wordt verricht door de interne druk. De kracht op een oppervlakte element is $-P\Delta\mathbf{S}$. Gezien vanuit een coördinatenstelsel dat in rust is t.o.v. de vloeistof beweegt $\Delta\mathbf{S}$, en legt in een tijdje Δt een afstand $\mathbf{v}\Delta t$ af. Dus de op $\Delta\mathbf{S}$ in het tijdje Δt verrichte arbeid is $-P\mathbf{v} \cdot \Delta\mathbf{S} \Delta t$. Per seconde wordt zo op het volume V een arbeid

$$-\int_S P\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = -\int \nabla \cdot (P\mathbf{v}) d^3x \quad (3.3.5)$$

verricht. De energiebalans wordt nu verkregen door de tijdafgeleide van (3.3.1) gelijk te stellen aan de som van de drie bijdragen (3.3.3), (3.3.4), en (3.3.5). Hieruit volgt de continuïteitsvergelijking

$$\partial_t \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho\Phi + \rho e \right) + \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho\Phi + \rho e + P \right) \mathbf{v} + \mathbf{J}_q \right] = 0 \quad . \quad (3.3.6)$$

Dit is de *energievergelijking* die beschrijft hoe de interne energie kan veranderen tengevolge van stroming en verrichte arbeid door de systeemkrachten. De vergelijking heeft de vorm van een continuïteitsvergelijking.

De energievergelijking kan vereenvoudigd worden door een aantal wiskundige manipulaties. Onder vergelijking (3.3.6) schrijven we de impulsvergelijking, invermenigvuldigd met $\mathbf{v}$

$$(\partial_t \rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} + (\nabla \cdot \mathbf{t}) \cdot \mathbf{v} = 0 \quad , \quad (3.3.7)$$

en de massacontinuïteitsvergelijking vermenigvuldigd met $\frac{1}{2}v^2$

$$\frac{1}{2}v^2 (\partial_t \rho + \nabla \cdot \rho \mathbf{v}) = 0 \quad . \quad (3.3.8)$$

Als we nu de voorlaatste vergelijking aftrekken en de laatste vergelijking optellen bij (3.3.6), en gebruik maken van een aantal tensor-identiteiten, dan kunnen we afleiden

$$\partial_t(\rho e) + \nabla \cdot (\rho e \mathbf{v} + \mathbf{J}_q) + P \nabla \cdot \mathbf{v} = -\partial_t(\rho\Phi) - \nabla \cdot (\rho\Phi \mathbf{v}) + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \Phi \quad . \quad (3.3.9)$$

Aan de rechterkant hebben we de termen verzameld die betrekking hebben op de zwaartekracht: $\mathbf{g} = -\nabla\Phi$. Aangezien de potentiaal Φ niet afhangt van de tijd kunnen we het rechterlid schrijven als

$$-\Phi (\partial_t \rho + \nabla \cdot \rho \mathbf{v}) - \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \Phi + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \Phi = 0 \quad . \quad (3.3.10)$$

De zwaartekracht blijkt dus geen rol te spelen in de balansvergelijking voor de inwendige energie.

We kunnen nog een kleine vereenvoudiging aanbrengen door $\partial_t \rho e = e \partial_t \rho + \rho \partial_t e$ te schrijven en in de eerste term nog eens de massa behoudswet toe te passen. Dan zien we ontstaan

$$\rho D e = -\nabla \cdot \mathbf{J}_q - P \nabla \cdot \mathbf{v} \quad , \quad (3.3.11)$$

met D de materiële afgeleide. Dit kunnen we de eerste hoofdwet van de hydrodynamica noemen. De betekenis is dezelfde als die van de gewone eerste hoofdwet,

namelijk toevoer van warmte en het verrichten van mechanische arbeid resulteren in een verandering van de inwendige energie.

We merken weer op dat in (3.3.11) de viscositeit is verwaarloosd. Meer algemeen wordt de energie vergelijking

$$\rho De = -\nabla \cdot \mathbf{J}_q - \mathbf{P} : \nabla \mathbf{v} \quad (3.3.12)$$

als gevolg van de substitutie (3.2.10).

Opgave 17 *Bekijk nog eens de drie fundamentele wetten van de vloeistof mechanica, te weten: de continuïteits-vergelijking (3.1.8), of de corresponderende massa-vergelijking, de Euler-vergelijking (3.2.12), en de energievergelijking (3.3.11). Maak een lijst van alle grootheden die hierin voorkomen, en geef een omschrijving van hun betekenis. Ga ook na wat hun dimensie is.*

3.4 Tweede hoofdwet

De drie behoudswetten die we hierboven behandeld hebben vormen de eigenlijke grondslag van de vloeistofmechanica. Vaak echter maakt men in berekeningen ook gebruik van thermodynamische betrekkingen en neemt daarbij - meestal stilzwijgend - aan dat de gewone thermodynamica van systemen in evenwicht ook toepasbaar is op systemen buiten evenwicht. Dit berust op de veronderstelling dat ieder fysisch infinitesimaal volume-element van de vloeistof beschouwd mag worden als zijnde in thermodynamisch evenwicht. Meer in het bijzonder neemt men aan dat een functie $S(t, \mathbf{x})$ gedefinieerd kan worden zodanig dat $S(t, \mathbf{x})\Delta^3x$ de entropie is van een fysisch infinitesimaal volume-element ter plaatse $\mathbf{x}$ en ten tijde t . Het blijkt handig om ook een *specifieke entropie* s in te voeren zodanig dat $S = \rho s$ met ρ de massadichtheid. De entropie bevat in een willekeurig volume V kunnen we dan schrijven als

$$\int_V S d^3x = \int_V \rho s d^3x \quad . \quad (3.4.1)$$

Volgens de tweede hoofdwet verandert de entropie bij toevoer van warmte. Deze toegevoerde warmte drukken we uit in de warmtestroom $\mathbf{J}_q$, d.w.z. de toegevoerde warmte per oppervlakte-eenheid en per tijdeenheid. De toegevoerde entropie vinden we dan door te delen door de temperatuur T . De totale toegevoegde entropie aan V is dus

$$-\int_S \mathbf{J}_s \cdot d\mathbf{S} = -\int_V \nabla \cdot \mathbf{J}_s d^3x \quad , \quad (3.4.2)$$

met $\mathbf{J}_s = \rho s \mathbf{v} + \mathbf{J}_q/T$ de som van de convectieve en conductieve entropie stromen. De tweede hoofdwet kan nu worden uitgedrukt door de ongelijkheid

$$\partial_t \int_V \rho s d^3x \geq -\int_V \nabla \cdot \mathbf{J}_s d^3x \quad . \quad (3.4.3)$$

De gelijkheid geldt voor reversibele processen en de ongelijkheid voor irreversibele. De extra hoeveelheid entropie geproduceerd in irreversibele processen is het verschil van linker- en rechterlid van (3.4.3). Men schrijft

$$\int_V (\partial_t \rho s + \nabla \cdot \mathbf{J}_s) d^3x = \int_V \sigma d^3x \geq 0 \quad . \quad (3.4.4)$$

De dichtheid σ noemt men de *entropieproductie*. Aangezien deze entropiebalans moet gelden voor ieder volume V , geldt ook de balansvergelijking:

$$\partial_t \rho s + \nabla \cdot \mathbf{J}_s = \sigma \quad , \quad (3.4.5)$$

$$\sigma \geq 0 \quad . \quad (3.4.6)$$

Deze twee formules representeren de lokale formulering van de tweede hoofdwet.

Het is mogelijk om een expliciete uitdrukking te vinden voor de entropieproductie door aan te nemen dat de specifieke entropie dezelfde functie $s = s(e, \rho^{-1}, \dots)$ van de specifieke energie en het specifiek volume is als in evenwicht. Dus

$$\left(\frac{\partial s}{\partial e} \right)_\rho = \frac{1}{T} \quad , \quad \left(\frac{\partial s}{\partial \rho^{-1}} \right)_e = \frac{P}{T} \quad . \quad (3.4.7)$$

Met de kettingregel volgt dan

$$T \partial_t s = \partial_t e + P \partial_t \rho^{-1} \quad , \quad (3.4.8)$$

$$T \nabla s = \nabla e + P \nabla \rho^{-1} \quad , \quad (3.4.9)$$

en door combinatie van deze twee

$$TDs = De + PD\rho^{-1} \quad , \quad (3.4.10)$$

met $D = \partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla$ de materiële afgeleide. Merk op dat deze vergelijkingen exact dezelfde vorm hebben als de Gibbs-relatie voor systemen in evenwicht.

De expliciete uitdrukking voor de entropieproductie wordt nu gevonden door in de laatste vergelijking de energiewet (3.3.12) en de continuïteitsvergelijking te substitueren:

$$\rho Ds = -\frac{\nabla \cdot \mathbf{J}_q}{T} - \frac{1}{T} (\mathbf{P} - P\mathbf{I}) : \nabla \mathbf{v} \quad . \quad (3.4.11)$$

Door deze uitdrukking te vergelijken met de balansvergelijking (3.4.5) zien we dat kennelijk de entropieproductie gegeven wordt door

$$\sigma = -\frac{1}{T^2} \mathbf{J}_q \cdot \nabla T - \frac{1}{T} \Pi : \nabla \mathbf{v} \quad , \quad (3.4.12)$$

waarin

$$\Pi = \mathbf{P} - P\mathbf{I} \quad (3.4.13)$$

de *visceuze druktensor* is. Deze benaming wordt duidelijk als we bedenken dat, door aftrekken van de hydrostatische druk, we dat gedeelte overhouden dat in statisch

evenwicht verdwijnt. Dus Π beschrijft het visceuze gedrag van vloeistofstroming. In statisch evenwicht is ook de warmte stroom nul. Dus σ is inderdaad een maat voor het niet-evenwichts gedrag van de vloeistof. Bovendien zien we in (3.4.12) dat $\mathbf{J}_q$ direkt gekoppeld is met de temperatuur-gradiënt en Π met de gradiënt van het snelheidsveld. In uniforme systemen is er dus geen entropie produktie.

Stel nu dat in een bepaalde vloeistof zowel viscositeit als warmte-uitwisseling tussen de verschillende delen van de vloeistof onbelangrijk is, d.w.z. $\mathbf{J}_q = 0$. Zulke vloeistoffen en gassen zonder viscositeit en warmtegeleiding staan bekend als *ideale vloeistoffen*. Dan reduceert (3.4.11) op grond van (3.4.10) tot

$$TDs = De + PD\rho^{-1} = 0 \quad . \quad (3.4.14)$$

Dus de beweging van een ideale vloeistof is *adiabatisch*, d.w.z. gezien vanuit het meebewegend vloeistof-frame verandert de specifieke entropie niet. Een gevolg is dat als de specifieke entropie op een zeker tijdstip overal in de vloeistof dezelfde waarde heeft, dan blijft dat ook zo. Zo'n stroming waarvoor geldt $s = \text{constant}$ heet *isentrop*.

We merken nog op dat een superfluide vloeistof als karakteristieke eigenschappen heeft: geen viscositeit en oneindige warmtegeleiding.

Opgave 18 *Neem aan dat $s = s(e, \rho^{-1})$ dezelfde functie van de specifieke energie e en het specifieke volume ρ^{-1} is als in evenwicht. Bewijs daaruit (3.4.10).*

Opgave 19 *Bewijs dat voor een isentrope stroming de Euler-vergelijking in de vorm $D\mathbf{v} = -\nabla h$ gebracht kan worden waarin $h = e + P\rho^{-1}$ de specifieke enthalpie is.*

Hoofdstuk 4

IDEALE VLOEISTOFFEN

4.1 Potentiaalstroming

Nu we in het vorige hoofdstuk de algemene wetten van de vloeistofmechanica hebben afgeleid, ligt het voor de hand als volgende stap te proberen oplossingen van deze vergelijkingen te vinden. Helaas is dit geen eenvoudige zaak omdat de vloeistof-vergelijkingen wiskundig een zeer complexe structuur hebben: ze vormen een stelsel van vijf gekoppelde niet-lineaire partiële differentiaal-vergelijkingen. Met onze huidige wiskundige kennis is een exacte oplossing hiervan een volstrekte onmogelijkheid. Om de vergelijkingen praktisch toepasbaar te maken zijn we gedwongen de vergelijkingen drastisch te vereenvoudigen m.b.v. benaderingen. Welke benaderingen bruikbaar zijn in een gegeven experimentele situatie hangt sterk af van deze situatie, en algemene regels zijn niet te geven. Er zijn echter een aantal standaard-benaderingen die vrij algemeen worden toegepast.

Zo zullen we ons in dit hoofdstuk beperken tot ideale vloeistoffen beschreven door de Euler-vergelijking

$$\rho D\mathbf{v} = \rho \mathbf{g} - \nabla P \quad . \quad (4.1.1)$$

We veronderstellen dat de toestandsvergelijking $P = P(s, \rho)$ gegeven is als een functie van de specifieke entropie s en de massadichtheid ρ . Het aantal onbekenden in de Euler-vergelijking komt daarmee op vijf: $\rho, s, \mathbf{v}$. Tezamen met de continuïteitsvergelijking

$$D\rho = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v} \quad , \quad (4.1.2)$$

en de adiabatische conditie

$$Ds = 0 \quad , \quad (4.1.3)$$

hebben we daarmee in totaal vijf vergelijkingen voor vijf onbekenden.

We hebben al eerder opgemerkt dat een vloeistof in hoge mate incompressibel is. Dit betekent dat we in goede benadering mogen aannemen dat overal in de vloeistof de massadichtheid ρ , en ook de deeltjesdichtheid, een constante waarde heeft. In dat geval behoeven we ρ niet op te lossen uit de vergelijkingen en de continuïteitsvergelijking reduceert tot

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad . \quad (4.1.4)$$

Het snelheidsveld van een incompressibele vloeistof is divergentievrij.

In §3.2 hebben we *rotatievrije stroming* gedefinieerd als een stroming waarvoor de vorticititeit overal nul is

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v} = 0 \quad . \quad (4.1.5)$$

Dit heeft als belangrijk gevolg dat het snelheidsveld geschreven kan worden als de gradiënt van een potentiaalfunctie

$$\mathbf{v} = \nabla \varphi \quad , \quad (4.1.6)$$

de zogenaamde *snelheidspotentiaal*. We willen nu bespreken of de stroming van een ideale vloeistof, waartoe we ons in dit hoofdstuk beperken, inderdaad rotatievrij kan zijn, en m.a.w. een *potentiaalstroming* kan zijn.

We bewijzen eerst dat als een incompressibel ideaal-vloeistofelement aanvankelijk rotatievrij is, dat ook zo blijft. Voor het bewijs nemen we de rotatie van de Euler-vergelijking in de vorm, zie (3.2.16) en (4.1.1),

$$\partial_t \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla v^2 - \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \nabla \Phi \quad , \quad (4.1.7)$$

waar Φ de zwaartekrachtspotentiaal is. Aangezien ρ constant is, en de rotatie van een gradiëntveld nul geeft, krijgen we

$$\partial_t \boldsymbol{\omega} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}) \quad . \quad (4.1.8)$$

Uitwerken van het rechterlid leidt tot

$$D\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} \quad , \quad (4.1.9)$$

als we gebruiken dat de vloeistof incompressibel is en dat $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$. Vergelijking (4.1.9) bepaalt de tijdverandering van de vorticititeit. Dus als $\boldsymbol{\omega} = 0$ op een gegeven moment dan geldt

$$D\boldsymbol{\omega} = 0 \quad , \quad (4.1.10)$$

en het vloeistofelement zal nooit een vorticititeit kunnen ontwikkelen. Dit is van groot praktisch belang omdat in veel situaties een vloeistofstroom om te beginnen rotatievrij is, bijvoorbeeld een uniforme stroming die later verstoord wordt.

De vorticititeit hangt nauw samen met de *circulatie* Γ van de stroming die gedefinieerd wordt als de lijnintegraal van $\mathbf{v}$ rond een gesloten kromme C :

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \int \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{S} \quad . \quad (4.1.11)$$

In het tweede lid, dat volgt met de stelling van Stokes, is $d\mathbf{S}$ een oppervlakte-element van het oppervlak S omsloten door C . Als de stroming rotatievrij is, dan is ook de circulatie nul. Verder kan men bewijzen dat voor een incompressibele ideale vloeistof geldt

$$D\Gamma = 0 \quad , \quad (4.1.12)$$

mits de externe krachten conservatief zijn. De circulatie is dus constant. Dit staat bekend als de *circulatiestelling van Thomson* (Lord Kelvin). Een belangrijk gevolg is dat het rotatievrij zijn van een stroming in een enkelvoudig samenhangend gebied, door de actie van conservatieve krachten niet verstoord wordt.

Opgave 20 Bereken de vorticiiteit voor het geval (i) van een vloeistof die roteert met een constante hoeksnelheid Ω , en (ii) van een laminaire stroming $v_x = v_x(y)$, $v_y = v_z = 0$. Kun je de uitkomst begrijpen?

Opgave 21 Herhaal de afleiding van (4.1.10) voor het geval van isentrope stroming; zie opgave 9 in hoofdstuk 3.

Opgave 22 Bewijs de identiteiten

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{A} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\nabla \cdot \mathbf{A}) \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B}$$

met behulp van

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C}$$

4.2 Vergelijking van Bernoulli

De Euler-vergelijking (4.1.7) toegepast op een incompressibele, of isentrope, en rotatievrije vloeistofstroming heeft de bijzondere eigenschap dat we daaruit meteen een bewegingsconstante kunnen vinden. We nemen de stroming eerst stationair. Dan volgt:

$$\nabla \left(\frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{\rho} P + \Phi \right) = 0 \quad , \quad (4.2.1)$$

en daaruit

$$\frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{\rho} P + \Phi = B_0 = \text{constant} \quad . \quad (4.2.2)$$

Dit is de *vergelijking van Bernoulli* voor potentiaalstroming met B_0 de constante van Bernoulli die overal in de vloeistof dezelfde waarde heeft.

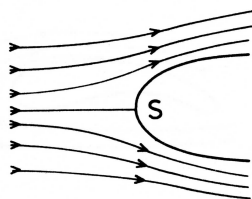
De vergelijking zegt dat de druk laag is bij grote snelheid, en omgekeerd. Dit kunnen we begrijpen als we bedenken dat $\frac{1}{2} \rho v^2$ de kinetische energie van de vloeistof is. Wanneer de stroming verloopt in de richting van toenemende druk dan moet de vloeistof arbeid verrichten tegen de drukgradiënt in, en verliest zo kinetische energie. Deze wordt teruggewonnen bij afnemende druk. Men noemt $P + \frac{1}{2} \rho v^2$ de *totale druk* omdat dit de maximum druk is die de vloeistof kan uitoefenen, en wel daar waar de vloeistof in rust is. Plaatsen waar de druk zijn maximum waarde bereikt, de zogenaamde *stuwdruk*, noemt men *stagnatiepunten*, zie figuur 4.1.

Vergelijking (4.2.2) kan eenvoudig uitgebreid worden tot niet-stationaire stroming als we gebruik maken van het feit dat voor potentiaalstroming de snelheid geschreven kan worden als in (4.1.6). Uit (4.1.7) volgt dan

$$\nabla \left(\partial_t \varphi + \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{\rho} P + \Phi \right) = 0 \quad , \quad (4.2.3)$$

met als oplossing

$$\partial_t \varphi + \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{\rho} P + \Phi = B_0 + f(t) \quad , \quad (4.2.4)$$

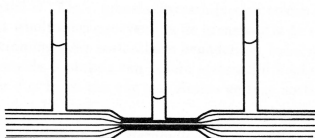


Figuur 4.1: Een stagnatiepunt S in geval van stroming langs een materieel lichaam

waarin $f(t)$ een willekeurige functie van de tijd is. Deze functie kan zonder verlies van algemeenheid nul genomen worden omdat we aan de potentiaal φ altijd een functie van de tijd kunnen toevoegen zonder (4.1.6) geweld aan te doen:

$$\varphi \rightarrow \varphi + \int^t f(\tau) d\tau \quad . \quad (4.2.5)$$

Substitutie in (4.2.4) toont dat $f(t)$ door deze toevoeging verdwijnt.



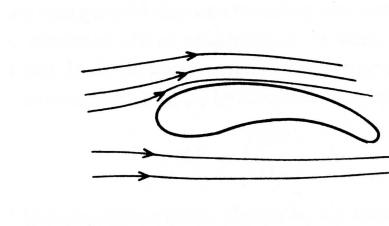
Figuur 4.2: Venturi-opstelling.

Een aantal bekende verschijnselen zijn eenvoudig te verklaren m.b.v. de stelling van Bernoulli. Eén daarvan is de verandering van de druk in een Venturi-buis, d.w.z. een buis met een plaatselijke vernauwing. Uit de continuïteitsvergelijking weten we dat de snelheid in de vernauwing toeneemt; zie opgave 3.11. Dus moet de druk afnemen. Immers volgens Bernoulli geldt

$$P_2 - P_1 = \frac{1}{2} \rho (v_1^2 - v_2^2) \quad (4.2.6)$$

voor het verband tussen druk en snelheid op twee punten in de stroom. In de Venturi opstelling wordt dit gedemonstreerd doordat de hoogte van de vloeistof in de eerste twee stijgbuisjes verschilt. De hoogtes in de buisjes 1 en 3 zou gelijk moeten zijn. Men vindt echter dat het niveau in 3 wat lager is. Dit is het gevolg van visceuze effecten die in de ideale-vloeistofbenadering verwaarloosd worden.

We kunnen ook begrijpen hoe stroming een *lift*, d.w.z. een kracht loodrecht op de stroomrichting, kan bewerkstelligen. Daartoe beschouwen we een vleugelvorm als in figuur 4.3. Aan de bovenzijde worden de stroomlijnen enigszins samengedrukt. Net als in de Venturi-pijp heeft dit tot gevolg dat de snelheid toeneemt en de druk afneemt. Aan de onderzijde treedt het omgekeerde effect op. Het netto effect is dus



Figuur 4.3: Stroming rond een vleugel.

een opwaartse kracht. Hierbij moeten we wel opmerken dat deze beschrijving van lift niet meer dan kwalitatief is. T.g.v. grenslaagverschijnselen treden allerlei complicaties op zoals blijkt uit windtunnel-proeven. In de grenslaag is de stroming niet rotatievrij en potentiaalstroming geen toelaatbare benadering, behalve in gevallen dat de in de stroom opgestelde obstakels een zekere stroomlijn hebben. Dan ziet men een grenslaag die zeer dun is, en een zog met slechts geringe vorticeit.

Opgave 23 *Hoe luidt de vergelijking van Bernoulli voor isentrope potentiaalstroming?*

Opgave 24 *Bewijs dat voor een rotatievrije maar compressibele stroming de vergelijking van Bernoulli geschreven kan worden als*

$$\partial_t \varphi + \frac{1}{2} v^2 + \Phi + \int_0^1 \frac{1}{\rho} dP = B_0 \quad ,$$

waarbij 0 een willekeurig referentiepunt is. Gebruik de definitie van totale differentiaal: $df(\mathbf{x}) = d\mathbf{v} \cdot \nabla f(\mathbf{x})$, en integreer langs een willekeurige lijn vanaf het referentiepunt 0 tot het veldpunt.

4.3 Geluidsvoortplanting

In §3.4 hebben we vastgesteld dat de stroming van een ideale, maar niet noodzakelijk incompressibele, vloeistof altijd adiabatisch en vaak isentroop is: $s = \text{constant}$. In het laatste geval kan de druk, geschreven als een functie $P = P(s, \rho)$ van de specifieke entropie s en de massadichtheid ρ , behandeld worden als een functie van alleen ρ :

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s d\rho \quad . \quad (4.3.1)$$

De adiabatische thermodynamische afgeleide die hierin optreedt

$$c_s^2 \equiv \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s = \frac{1}{\rho \kappa_s} \quad , \quad c_s > 0 \quad , \quad (4.3.2)$$

met

$$\kappa_s = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_s = -\rho \left(\frac{\partial^2 h}{\partial P^2} \right)_s \quad (4.3.3)$$

de zogenaamde *adiabatische compressibiliteit*, heeft de dimensie van (snelheid)². In deze paragraaf zullen we laten zien dat c_s geïdentificeerd kan worden met de *geluidssnelheid*, d.w.z. de snelheid waarmee een drukgolf zich voortplant in een compressibele vloeistof. We veronderstellen daarbij dat de lokale entropie constant blijft.

We mogen er van uitgaan dat isentrope stroming rotatievrij is; zie opgave 4.21. Dus geldt de vergelijking van Bernoulli die we voor isentrope stroming kunnen schrijven als (zie ook opgave 3.19):

$$\partial_t \varphi + \frac{1}{2} v^2 + h = B_0 \quad . \quad (4.3.4)$$

Hierin is φ de snelheidspotentiaal (4.1.6) en $h = e + P\rho^{-1}$ de specifieke enthalpie. Het zwaartekrachtsveld laten we buiten beschouwing. Nogmaals differentiëren van (4.3.4) naar de tijd geeft

$$\partial_t^2 \varphi + \mathbf{v} \cdot \partial_t \mathbf{v} + c_s^2 \rho^{-1} \partial_t \rho = 0 \quad , \quad (4.3.5)$$

waarbij we gebruik hebben gemaakt van (4.3.1) en de thermodynamische relatie $(\partial h / \partial P)_s = \rho^{-1}$ die volgt uit $dh = Tds + \rho^{-1} dP$. De vergelijking modifieren we m.b.v de continuïteitsvergelijking

$$\partial_t \rho + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho + \rho \nabla^2 \varphi = 0 \quad , \quad (4.3.6)$$

waarin we (4.1.6) hebben gesubstitueerd, en m.b.v. de bewegingsvergelijking, zie (4.1.7), invullen met $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{v} \cdot \left(\partial_t \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla v^2 + c_s^2 \rho^{-1} \nabla \rho \right) = 0 \quad . \quad (4.3.7)$$

Met de laatste twee vergelijkingen kunnen de afgeleiden van de massadichtheid geëlimineerd worden. Wat we overhouden is de volgende differentiaalvergelijking

$$\partial_t^2 \varphi - c_s^2 \nabla^2 \varphi = -\partial_t v^2 - \frac{1}{2} (\mathbf{v} \cdot \nabla) v^2 \quad (4.3.8)$$

voor de snelheidspotentiaal van een compressibele vloeistof.

Wat direct opvalt is dat het linkerlid lineair is in φ , maar dat het rechterlid van de tweede en derde graad in φ is. Vergelijking (4.3.8) is dus een niet-lineaire partiële differentiaalvergelijking waarvoor geen algemene oplosmethode bestaat. We kunnen echter de vergelijking lineariseren als we aannemen dat de verstoringen beschreven door de snelheidspotentiaal φ klein zijn. Lineariseren betekent dan weglaten van het rechterlid met als gevolg dat de vergelijking voor de snelheidspotentiaal reduceert tot

$$\partial_t^2 \varphi - c_s^2 \nabla^2 \varphi = 0 \quad . \quad (4.3.9)$$

Een vergelijking van deze vorm heet een *golfvergelijking* omdat, zoals we hieronder zullen zien, de oplossingen van deze vergelijking golfverschijnselen beschrijven die zich voortplanten met snelheid c_s .

Opgave 25 Bereken de geluidssnelheid voor een incompressibele vloeistof, voor een Boltzmann gas, en voor een fotogas met toestandsvergelijking $E = 3P$.

Opgave 26 *Lineariseer vergelijking (4.3.8) door aan te nemen dat het snelheidsveld te schrijven is als $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \delta\mathbf{v}$ waarbij $\mathbf{v}_0$ een constante stromingssnelheid is en $\delta\mathbf{v} = \nabla\varphi(t, \mathbf{x})$ een kleine tijd en ruimte afhankelijke afwijking van het constante stromingspatroon. Laat zien dat voor een stationaire stroming, waarvoor bovendien $\mathbf{v}_0 = (v_0, 0, 0)$, de vergelijking wordt*

$$(1 - Ma^2) \partial_x^2 \varphi + \partial_y^2 \varphi + \partial_z^2 \varphi = 0 \quad ,$$

met $Ma = v_0/c_s$ het Machgetal. Wat concludeer je hieruit voor $Ma^2 \ll 1$?

Opgave 27 *Neem ook aan dat de druk en de andere thermodynamische grootheden geschreven kunnen worden als $P = P_0 + \delta P$ etc. met P_0 de evenwichtsdruk. Bewijs*

$$\delta P = \rho_0 \partial_t \varphi$$

$$c_s^2 \delta \rho = \rho_0 \partial_t \varphi$$

door de Euler-vergelijking te lineariseren voor het geval $\mathbf{v}_0 = 0$.

4.4 Geluidsgolven

De golfvergelijking (4.3.9) heeft talloze oplossingen, en de randcondities bepalen de specifieke oplossing voor een gegeven probleem. We beperken ons tot een oneindig medium, en bekijken een oplossing $\varphi(t, x)$ die behalve van t alleen afhangt van de x -coördinaat en dus voldoet aan

$$\partial_t^2 \varphi - c_s^2 \partial_x^2 \varphi = 0 \quad . \quad (4.4.1)$$

Teneinde deze vergelijking op te lossen voeren we de twee nieuwe variabelen $\xi = x - c_s t$ en $\zeta = x + c_s t$ in. Als we nu φ opvatten als een functie van ξ en ζ , en gebruik maken van

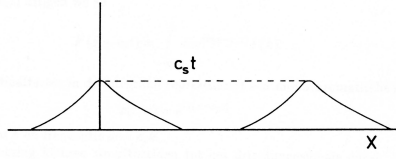
$$\partial_t \varphi(\xi, \zeta) = -c_s \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + c_s \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \quad , \quad (4.4.2)$$

$$\partial_x \varphi(\xi, \zeta) = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \quad , \quad (4.4.3)$$

zien we eenvoudig in dat de algemene oplossing van (4.4.1) te schrijven is als

$$\varphi(t, x) = F(x - c_s t) + G(x + c_s t) \quad , \quad (4.4.4)$$

met F en G twee willekeurige functies. Dus φ is de superpositie van twee lopende golven, de één in de richting van de positieve x -as en de ander in de negatieve richting. Als bijvoorbeeld $F(x - c_s t)$ een maximum heeft voor $x = 0$ op tijdstip $t = 0$ dan bevindt dit maximum zich op tijdstip t in het punt $x = c_s t$. Daarbij blijft de vorm van de verstoring ongewijzigd. Het algemene beeld is dus dat snelheidsveranderingen die voldoen aan de golfvergelijking (4.4.1) zich voortplanten met de geluidssnelheid c_s . Verder kunnen we nog zeggen dat deze geluidsgolven *longitudinaal* zijn, d.w.z. de snelheidsverstoring $\delta v_x = \partial_x \varphi$ ligt in de voortplantingsrichting.



Figuur 4.4: Een functie $F(x - c_s t)$ op tijdstip $t = 0$ en een later tijdstip.

De oplossing (4.4.4) hebben we gevonden door aan te nemen dat de potentiaal niet afhangt van y en z . Op dezelfde manier kunnen we ook golfoplossingen vinden in de y - en z -richtingen door aan te nemen dat φ niet afhangt van respectievelijk x, z en x, y . Omdat de golfvergelijking lineair is, is iedere lineaire combinatie van zulke oplossingen weer een oplossing van de vergelijking. En i.h.a. kunnen we een willekeurige superpositie bekijken van een willekeurig aantal golven dat zich voortplant in een willekeurig aantal richtingen. Zo'n willekeurig groot aantal combinaties leent zich natuurlijk niet erg voor een systematische behandeling. We kunnen ons echter beperken tot *monochromatische golven*, d.w.z. sinus en cosinusfuncties, omdat een willekeurige golf altijd gezien kan worden als een lineaire combinatie van monochromatische golven met verschillende frequenties. Deze decompositie in monochromatische golven is niets anders dan een toepassing van de *Fourier-stelling* die zegt dat een functie $F(x)$ onder zeer algemene voorwaarden geschreven kan worden als de integraal

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \tilde{F}(k) \quad . \quad (4.4.5)$$

De functie $\tilde{F}(k)$, die bepaalt met welk gewicht een golf met golfgetal $k = 2\pi/\lambda$ vertegenwoordigd is, heet de Fourier-getransformeerde van $F(x)$. Voor een lopende golf $F(x - c_s t)$ krijgen we zo

$$F(x - c_s t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x - c_s t)} \tilde{F}(k) \quad . \quad (4.4.6)$$

De exponentiaalfactor in de integrand representeert een monochromatische golf

$$\varphi(t, x) = e^{ik(x - c_s t)} \quad , \quad (4.4.7)$$

met golfgetal k en frequentie $\omega = c_s k$.

De redenering kunnen we uitbreiden tot het drie-dimensionale geval. We beschouwen de vlakke golf

$$\varphi(t, \mathbf{x}) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t} \quad . \quad (4.4.8)$$

Deze wordt gekarakteriseerd door drie golfgetallen $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ in de drie ruimtelijke richtingen en de frequentie ω . Teneinde vast te stellen onder welke voorwaarden zo'n vlakke golf geluidsgolven beschrijft, substitueren we (4.4.8) in de golfvergelijking (4.3.9). Dan blijkt

$$(\omega^2 - c_s^2 k^2) \varphi(t, \mathbf{x}) = 0 \quad . \quad (4.4.9)$$

Hieraan kan alleen voor alle tijden en plaatsen voldaan zijn als geldt

$$\omega = \pm c_s k \quad . \quad (4.4.10)$$

Zo'n verband tussen frequentie en golfgetal noemt men een *dispersierelatie*. Driedimensionale monochromatische geluidsgolven zijn dus van de vorm

$$e^{ik(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} \mp c_s t)} = e^{i\omega(\mp \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{c_s} - t)} \quad . \quad (4.4.11)$$

Hierin is $\mathbf{n}$ een eenheidsvector in de voortplantingsrichting $\mathbf{k}$. Monochromatische golven corresponderen met een lineaire dispersierelatie zoals (4.4.10). Men spreekt dan van niet-dispersieve golfvoortplanting.

Opgave 28 *Laat zien dat in een geluidsgolf van de vorm $F(x - c_s t)$ druk en snelheidsvariaties verbonden zijn volgens*

$$\delta P = \rho_0 c_s \delta v_x \quad .$$

Maak gebruik van opgave 27.

Opgave 29 *Ga na dat (4.4.11) correspondeert met een vlakke lopende golf in de richting $\mathbf{n}$.*

Opgave 30 *Stel $\varphi = \varphi(t, r)$ is slechts een functie van t en de afstand $r = |\mathbf{x}|$ tot de oorsprong. Bewijs dat de golfvergelijking voor dit geval geschreven kan worden als*

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varphi) - \frac{1}{c_s^2} \partial_t^2 \varphi = 0 \quad .$$

Zoek een monochromatische oplossing van deze vergelijking. Welke geometrische vorm heeft het golffront?