Juni 2014

De tweede wet van Newton en modelleren

Modelregels bij de Newton constructie

Chris van Weert, Institute of Physics, Universiteit van Amsterdam

Deze notitie laat zien dat de stapsgewijze constructiemethode van Newton voor de baan van een bewegend voorwerp direct vertaald kan worden in een dynamisch modelleervoorschrift dat overeenkomt met een klasse van veel gebruikte numerieke algoritmen voor het oplossen van dynamische problemen. Hiervoor hoeven geen extra veronderstellingen te worden toegevoegd aan die van Newton zelf, afgezien van de keuze van een optimalisatie factor. Dit maakt het mogelijk modelleeractiviteiten, zowel conceptueel als praktisch, intrinsiek onderdeel te maken van de mechanicalessen.

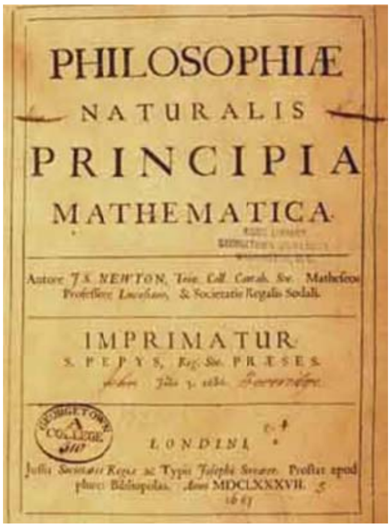
1. Inleiding

Het standaard uitgangspunt voor het beschrijven en voorspellen van beweging in de klassieke mechanica is de tweede wet van Newton in de welbekende vorm $F = m \cdot a$. De schijnbare eenvoud van deze formule staat in scherp contrast met het grote aantal additionele fysische en wiskundige inzichten, vaak niet eens geëxpliciteerd, die nodig zijn om de wet van Newton toe te passen bij het oplossen van dynamische problemen[1]. Voor beginners in de mechanica (leerlingen en studenten) vergt het een aanzienlijke inspanning om hierin enige vaardigheid in te verwerven. In het traditionele natuurkundeonderwijs wordt daarom relatief veel aandacht besteedt aan kinematica en speciale gevallen, zoals de valversnelling en de cirkelbeweging, problemen die al door de voorgangers van Newton zijn opgelost[2].

De weg van inzicht naar toepassing kan ook anders worden afgelegd, namelijk door de redenering te volgen zoals die door Newton is beschreven in zijn beroemde *Principia*[3]. In dat werk komt de tweede wet van Newton in de vorm $F = m \cdot a$ niet voor, zelfs niet als de tekst met grote welwillendheid wordt gelezen[2]. De aanpak van Newton is in essentie een meetkundige iteratiemethode voor het berekenen van de beweging. Door de natuurkunde didactiekgroep van het Freudenthal Instituut in Utrecht is deze aanpak uitgewerkt in lesmateriaal[4] dat verder is ontwikkeld voor het NiNa-project[5,6,7].

Deze notitie heeft de opzet te laten zien dat de iteratieve Newton methode, vertaald in een dynamisch modelleervoorschrift, precies overeenkomt met een klasse van veel gebruikte numerieke algoritmen voor het oplossen van dynamische problemen. Het is een aanvulling op de modelregels in het Informatieboek Mechanica & Modelleren geschreven door Dick Hoekzema voor het NiNa-project[8]. Hiervoor hoeven geen extra veronderstellingen te worden toegevoegd aan die van Newton zelf, afgezien van de keuze van een numerieke optimalisatie factor. Dit maakt het mogelijk modelleeractiviteiten, zowel conceptueel als praktisch, intrinsiek onderdeel te maken van de mechanicalessen[9,10,11], zonder de systematische opbouw van de mechanica geweld aan te doen. In de Engelse lesmethode Advancing Physics[12] wordt deze aanpak van de mechanica treffend samengevat onder de titel ‘Computing the next move’.

2. Newton constructiemethode


PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

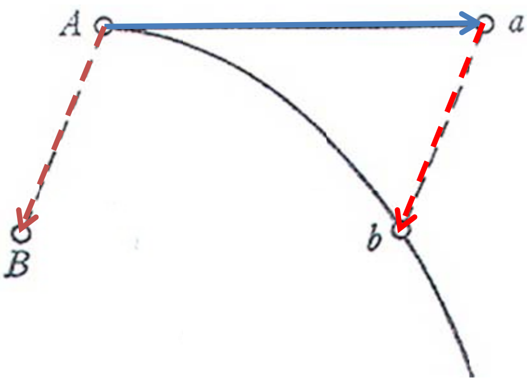
Autore J S. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

In de Principia stelt Newton als zijn tweede axioma:
De verandering van de beweging (motus) is evenredig met de werkende kracht en heeft plaats langs de rechte lijn volgens welke die kracht werkt.

De betekenis van zijn tweede wet is in de loop van de geschiedenis uitgebreid becommentarieerd, o.a. door Dijksterhuis[2]. De vraag is wat Newton bedoelde met '*de verandering van de beweging*'. De gebruikelijke interpretatie is dat Newton de verandering van de 'quantitas motus', ofwel de impuls, bedoelde. Dat is echter een interpretatie vanuit modern inzicht, maar niet die van Newton[13]. In een passage die hij later schreef rond 1690, geeft Newton een uitleg aan de hand van figuur 1.



Figuur 1. The Newton constructie

In deze figuur beweegt een massa(zwaarte)punt met massa *m* in een tijdstap Δt van *A* naar *b*. Als er geen kracht is zou zijn, beweegt *m* van *A* naar *a*. Dat is de inertiële verplaatsing. De afstand *ab* is de extra verplaatsing door de werkzame kracht. Met andere woorden, de verandering van de beweging is de afstand tussen de plaats *a* waar het massapunt geweest zou zijn zonder werkende kracht en de feitelijke plaats *b*. Volgens Newton is deze afstand gelijk aan de afstand *AB*, d.w.z. de verplaatsing t.g.v. dezelfde kracht als het massapunt aanvankelijk in rust zou zijn; m.a.w. de kracht hangt niet af van de snelheid. Als we deze verplaatsing weten, kunnen we *b* vinden met de parallellogramregel van Newton en daarmee de beweging construeren.

De centrale vraag is: hoe groot is de extra verplaatsing in een tijdsverloop Δt als gevolg van een kracht *F*? Noem $t_A = t_0$, $t_b = t_1$, $t_1 = t_0 + \Delta t$, en v_0 de beginsnelheid op t_0. Dan is

$$s_{Ab} = v_0 \cdot \Delta t + s_{ab}$$

De lijnstukken moeten opgevat worden als vectoren, maar dat geven we hier voor de eenvoud niet expliciet aan. Newton veronderstelt dat s_{AB}, en dus ook s_{ab}, evenredig is met de werkende kracht *F*, en ten gevolge daarvan verandert '*met het kwadraat van de tijd aan het allereerste begin*', net als bij de valbeweging. Dus als er een kracht werkt, is er een extra verplaatsing ten opzichte van de inertiële beweging. Die extra verplaatsing zal groter zijn naarmate de kracht op het voorwerp groter is, de tijdstap langer duurt en de massa van het voorwerp kleiner is. In formule:

$$s_{ab} \propto \frac{F}{m} \cdot \Delta t^2$$

Newton doet geen uitspraak over een mogelijke evenredigheidsconstante; we stellen die voorlopig gelijk aan één; zie ook sectie 5 hieronder. In zijn verdere uitleg maakt Newton duidelijk hoe, voor een gegeven kracht, door iteratie de baan kan worden bepaald. De argumentatie hangt niet af van de grootte van de tijdstap; die kan heel klein gemaakt worden om een nauwkeurig resultaat te krijgen.

3. MODELREGELS

De Newtonconstructie staat uitgebreid beschreven in de NiNa-module Wisselwerking en Beweging[4]. Het is een eindige differentie methode, dus is het te verwachten dat de uitkomst een benadering geeft voor de 'echte' baan. Het verbazingwekkende is echter dat deze benadering zo goed is, beter in ieder geval dan de dynamische solvers gebruikt in de grafische modelleeromgevingen van Coach[14] en PowerSim[15]. Dat laten we hieronder zien door de Newtonconstructie om te schrijven in een dynamisch modelleervoorschrift.

In de geometrische aanpak van Newton vinden we voor de baan na een tijdstap Δt:

$$s_1 = s_0 + v_0 \cdot \Delta t + \frac{F}{m} \cdot \Delta t^2 = s_0 + \left(v_0 + \frac{F}{m} \Delta t \right) \cdot \Delta t$$

Hierin hebben we s_A en s_b hernoemd als s_0 en s_1. Deze uitdrukking voor de afgelegde weg kan herschreven worden in de vier modelregels

$$\begin{array}{llll} t_1 = t_0 + \Delta t & & v_1 = v_0 + a_0 \cdot \Delta t \\ a \triangleq F/m & & s_1 = s_0 + v_1 \cdot \Delta t \end{array}$$

In deze modelregels is regel twee links niet meer dan de definitie van de afkorting *a*, geen dynamisch voorschrift. Die staat in regel één rechts: als we een niet-eenparige beweging waarnemen dan concluderen we dat er een kracht werkzaam is. Het effect van de kracht is een snelheidsverandering:

$$v_1 - v_0 = \Delta v = \frac{F}{m} \Delta t$$

De tweede wet van Newton in differentievorm.

Met de bovenstaande modelregels kunnen de tijdstappen geïtereerd worden. Dit is een vaak toegepaste numerieke methode die bekend staat als de semi-impliciete Euler methode[16], of ook wel als het Euler-Cromer algoritme[17]. Het Euler-Cromer algoritme verschilt van de gewone numerieke Euler methode die je krijgt door v_1 te vervangen door v_0 in de tweede modelregel rechts. D.w.z. de Euler methode rekent met de beginsnelheid voor een gegeven tijdinterval en Euler-Cromer met de eindsnelheid.

Beide methoden maken een fout van orde Δ*t* over een eindig interval, maar de Euler-Cromer methode is een zogenaamde simplectische methode (d.w.z. een faseruimte-element blijft behouden), in tegenstelling tot de eenvoudiger Euler methode. Dit heeft tot gevolg dat het Euler-Cromer algoritme stabieler is en bijna altijd de energie behouden laat (als de kracht conservatief is). Bij veel problemen heeft de standaard Euler methode als artefact dat de energie toeneemt met het aantal tijdstappen in de iteratie. Het Euler-Cromer algoritme is dus beter dan de gewone Euler methode en is bovendien het algebraïsch equivalent van de Newtonconstructie zonder verdere veronderstellingen zoals we hier hebben laten zien.

4. LEAPFROG-METHODE

Voor wie hiermee niet tevreden is, het kan nog beter. Voor constante kracht en dus constante *a* is het duidelijk dat de boven gegeven modelregels niet optimaal zijn. Uit de bekende uitdrukking voor de exacte baan t.g.v. een constante kracht volgt namelijk

$$s(t_0+\Delta t)=\frac{1}{2}a\cdot(t_0+\Delta t)^2=s_0+v_0\cdot\Delta t+\frac{1}{2}a\cdot\Delta t^2$$

In tegenstelling tot onze eerdere aanname, heeft de laatste term een factor ½. We kunnen dit interpreteren als het voorschrift om in de iteratie niet de waarde van de snelheid op het begintijdstip te nemen (Euler) of aan het eind van een tijdinterval (Euler-Cromer), maar om de snelheid te nemen in het tussenpunt

$$v(t_0+\frac{1}{2}\Delta t)\cong v_0+\frac{1}{2}a\cdot\Delta t$$

De modelregels worden dan

$$\begin{array}{ll} t_1=t_0+\Delta t & v_{1/2}=v_0+\frac{1}{2}a_0\cdot\Delta t \\ a=F/m & s_1=s_0+v_{1/2}\cdot\Delta t \end{array}$$

De iteratie van deze modelregels begint met de snelheid $v_{1/2}$ als gegeven in de eerste regel rechts. Hieruit kunnen we een iteratiemethode met gehele tijdstappen construeren door dezelfde tussenpuntbenadering toe te passen op een negatieve tijdstap van v_1 naar

$$v_{1/2}=v_1-\frac{1}{2}a_1\cdot\Delta t$$

De volgende gehele tijdstap kunnen we dan berekenen met de snelheid

$$v_{3/2}=v_1+\frac{1}{2}a_1\cdot\Delta t=v_{1/2}+a_1\cdot\Delta t$$

In de iteratie worden de opeenvolgende baanposities dus berekend op gehele tijdstippen en de opvolgende snelheden op halve tussenpunten, d.w.z. de modelregels zijn:

$$t_1 = t_0 + \Delta t \qquad v_{3/2} = v_{1/2} + a_1 \cdot \Delta t$$
$$a_1 = F(s_1)/m \qquad s_1 = s_0 + v_{1/2} \cdot \Delta t$$

Deze numerieke iteratiemethode van de bewegingsvergelijkingen staat bekend als de 'leapfrog' methode, o.a. beschreven in de Feynman Lectures[18].

Men kan bewijzen dat de leapfrog-methode een fout maakt van orde Δt^2. Deze eigenschap is karakteristiek voor tussenpunt methodes, die in het algemeen een betere benadering geven dan beginpunt/eindpunt benaderingen[19]. Daarmee is de leapfrog-methode aanzienlijk nauwkeuriger dan zowel het Euler als het Euler-Cromer algoritme omdat die van de eerste orde in Δt zijn. De leapfrog-methode is ook een simplectische methode. Tenslotte, de leapfrog-methode is expliciet tijd omkeerbaar, d.w.z. als men eerst *n* stappen in de voorwaartse richting uitvoert en dan hetzelfde aantal negatieve tijdstappen terug in de tijd, komt men uit op de startpositie. En dat alles met weinig extra rekenoverhead. Details kan men vinden, bijvoorbeeld, in de al genoemde Feynman lectures[18] en in de toegankelijke lecture notes van Paul Young[20].

5. Conclusie

De algemene ervaring is dat modelleren in het natuurkundecurriculum vaak minder oplevert dan verwacht[9]. Een belangrijke reden is dat leerlingen het verband niet zien tussen de eerder geleerde theoretische concepten en het modelleerproces. Modelleren is voor hen een abstracte bezigheid waarvoor aparte vaardigheden en nieuwe kennis vereist zijn. Bovendien geven begrippen als model, benadering en iteratie, de indruk dat de resultaten maar een beperkte geldigheid hebben.

In een leertraject gebaseerd op de constructiemethode van Newton worden deze valkuilen vermeden. Modelleren is onderdeel van de conceptuele basis van de theorie, en behoeft dus geen aparte rechtvaardiging; het model is in dit geval de theorie. Bovendien is deze conceptuele basis precies de kern van de Newtonse dynamica, namelijk: de feitelijke baan van een materieel lichaam is de superpositie van een eenparige beweging (eerste wet van Newton) en een versnelde beweging evenredig met de werkende kracht (tweede wet van Newton).

Het didactische voordeel van deze aanpak is dat de versnelling geen dynamische variabele is. Er is daarom geen reden om in eerste instantie veel tijd te besteden aan een wiskundig correcte definitie van het concept versnelling, zoals gebruikelijk in het traditionele mechanicaonderwijs. Een kwalitatieve duiding als 'verandering van snelheid' volstaat. Hierdoor wordt het mogelijk een leerweg modelleren al te beginnen in de onderbouw.[10,11] Het precieze begrip versnelling, en daarmee de wet $F = m \cdot a$, kan later aan de orde komen als leerlingen al enige ervaring hebben met dynamische problemen. Het is dan een wiskundige verfijning, geen nieuw natuurkundig inzicht.

LITERATUUR

[1] Frank Wilczek, Whence the Force of F = ma? Physics Today, October 2004
[2] E.J. Dijksterhuis, De mechanisering van het wereldbeeld, Meulenhoff, 1996
[3] I. Newton, Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, 1687
[4] Kees Klaassen, Mechanica, een Inleidende Cursus voor 4vwo, 2007
[5] Peter Dekkers, Kees Hooyman, Marjolein Vollebregt, Koos Kortland, Wisselwerking en beweging VWO, 2012; betanova.nl/lesmateriaal/; schoolsupport.nl/
[6] Roeland Boot en Peter Dekkers, NiNa in de klas, NVOX, 2007, 313
[7] Peter Dekkers, Marjolein Vollebregt, Kees Hooyman, Nieuw bij mechanica in 4 vwo, NVOX, 2009, 409
[8] Dick Hoekzema, Mechanica & Modelleren, informatieboek VWO, 2008
[9] Onne van Buuren, Peter Uylings, Ton Ellermeijer, Towards a learning path for computer modeling, Selected contributions from the GIREP-EPEC & PHEC International Conference, Leicester, 2009
[10] Onne van Buuren, Peter Uylings, Ton Ellermeijer, A modelling learning path, integrated in the secondary school curriculum, starting from the initial phases of physics education, Proceedings GIREP-ICPE-MPTL Conference, Reims, 2010
[11] Onne van Buuren, Development of a Modelling Learning Path, proefschrift UvA, 2014
[12] advancingphysics.org/
[13] plato.stanford.edu/entries/newton-principia/index.html#NewLawMot
[14] cma-science.nl/software/coach6/
[15] fisme.science.uu.nl/modelleren/index.php
[16] en.wikipedia.org/wiki/Semi-implicit_Euler
[17] Todd Timberlake and Javier Hasbun, Computation in Classical Physics, Am. J. Phys. 76, 2008, 334
[18] R. Feynman, The Feynman Lectures on Physics, deel I, sec 9.6
[19] en.wikipedia.org/wiki/Midpoint_method
[20] Peter Young, The leapfrog method and other 'symplectic' algorithms for integrating Newton's laws of motion, 2013; physics.ucsc.edu/